UNIVERSITÉ DE BORDEAUX II

UNITÉS D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE DES SCIENCES MÉDICALES

Année 1973, Thèse nº 209

LE TEST G

THESE POUR LE DOCTORAT EN MEDECINE

présentée et soutenue publiquement le jeudi 20 septembre 1973

par Michel PÉLISSOU

né le 20 juillet 1942 à Montauban (Tarn-et-Garonne)

chargé de cours de Physique Médicale
licencié ès sciences
attaché de Faculté-assistant de sciences fondamentales

EXAMINATEURS DE LA THÈSE

M. J. DUHAMEL	Professeur	Président
M. R. TESSIER	Professeur	Juges
M. J. LATRILLE	Agrégé	Juges
M. J-C. ROQUES	Agrégé	Juges

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549625_0001

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX II

UNITÉS D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE DES SCIENCES MÉDICALES

Année 1973, Thèse nº 209

LE TEST G

THESE POUR LE DOCTORAT EN MEDECINE

présentée et soutenue publiquement le jeudi 20 septembre 1973

par Michel PÉLISSOU

né le 20 juillet 1942 à Montauban (Tarn-et-Garonne)

chargé de cours de Physique Médicale
licencié ès sciences
attaché de Faculté-assistant de sciences fondamentales

EXAMINATEURS DE LA THÈSE

M. J. DUHAMEL	Professeur	Président
M. R. TESSIER	Professeur	
M. J. LATRILLE	Agrégé	Juges
M. J-C. ROQUES	Agrégé	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

" ... Mais je me disais : ma femme si elle croit que je vis, croit que je marche. Mes camarades croient que je marche. Ils ont tous confiance en moi . Et je suis un salaud si je ne marche pas ..... "

TERRE DES HOMMES

Antoine de SAINT EXUPERY.

A MA FEMME,

dont l'amour, la confiance et le travail ont été pour moi un soutien quotidien.

A Monsieur C. SAINT-GIRONS,

Maître Assistant à l'Université de Bordeaux III
Agrégé de lettres et grammaire
Officier des Palmes Académiques.

Vos cours de littérature furent pour moi un émerveillement.

Maître incomparable vous transmettez à vos élèves , l'humanisme que vous vivez.

Votre enseignement et votre exemple me guideront dans l'exercice de la Médecine.

Je vous prie d'accepter cet hommage très respectueux.

A Monsieur le Professeur J.J. BOUNHIOL

Professeur de Biologie Animale à l'Université de Bordeaux I
Docteur en Médecine
Docteur ès Sciences
Chevalier de l'Ordre National du Mérite
Commandeur des Palmes Académiques.

Je n'oublierai jamais la confiance que vous m'avez spontanément témoignée au lendemain d'un oral.

Enseignant soucieux de l'avenir de vos élèves vous donnez un exemple rare que je souhaite imiter.

Moniteur de Travaux Pratiques dans votre Laboratoire, vous m'avez initié à la Biologie Animale et à l'Embryologie, maintes fois j'ai apprécié votre érudition.

Je vous prie de croire à mes sentiments très respectueux.

A Monsieur J. LASSALLE

Chef des Relations Extérieures d'Esso-Rep
Président du Centre de Relations Publiques d'Aquitaine.

Vous m'avez donné une chance exceptionnelle en m'engageant en 1961, comme conférencier au Département Information d'Esso Standard.

Ce fut le début d'une collaboration sans cesse croissante jusqu'à la fin de mes études médicales en 1969.

Je mesure aujourd'hui ce que m'ont apporté la découverte d'une grande société, l'acquisition de la technique des conférences, enfin et surtout l'esprit de relations publiques.

Votre libéralisme, votre générosité, votre bonté sont pour moi un exemple.

Je vous prie d'accepter l'assurance de ma reconnaissance et de mon entier dévouement.

A Monsieur le Professeur J. DUHAMEL ,

A Monsieur le Professeur E. NEUZIL,

Professeur de Biochimie Médicale
Docteur ès Sciences
Médecin Biologiste des Hôpitaux, Chef de Service
Officier des Palmes Académiques,
Officier du Mérite Sénégalais.

A Madame E. BAUMELON ,

Directrice Honoraire du Lycée Magendie
Chevalier de la Légion d'Honneur
Officier des Palmes Académiques.

A Mademoiselle S. THERON ,

Directrice du Lycée Maine de Biran (Bergerac)
Officier des Palmes Académiques.

A Madame J. CARON,

Surveillante Générale Honoraire
Officier des Palmes Académiques.

Durant mes deux premières années de Médecine, Maître auxiliaire de Mathématiques au Lycée de Ribérac (Dordogne), puis au Lycée Magendie à Bordeaux, il me fallait à la fois assurer mon service et obéir aux obligations de présence à la Faculté, sous peine d'interdiction de présenter l'examen de fin d'année.

Sans votre complicité active et volontaire je n'aurais pu réussir.

Je vous dois d'être aujourd'hui Médecin, soyez assurés de ma profonde reconnaissance.

A MES AMIS DE L'INTERNAT

AUX SAGE-FEMMES DE LA MATERNITE

AUX INFIRMIERES DU BLOC OPERATOIRE

Témoignage de mon amitié.

- CENTRE HOSPITALIER DUBOIS -

BRIVE 1969-1970

A Monsieur le Docteur F-R MISSONNIER

Ancien Interne des Hôpitaux de Paris
Ancien Chef de Clinique à l'Hôtel Dieu
Chirurgien
Chef de Service au Centre Hospitalier Dubois.

Vous m'avez toujours réservé un accueil particulièrement bienveillant ; j'ai eu le bonheur de profiter de votre grande expérience, vos conseils me sont chaque jour utiles, l'enseignement pratique et efficace que vous m'avez donné aurait été irremplaçable.

Soyez certain de mon attachement et de ma gratitude.

A NOS JUGES

Monsieur le Docteur J.C. ROQUES

Maître de Conférences, Agrégé de Biophysique,
Médecin des Hôpitaux.

C'est avec joie que nous vous accueillons comme membre de notre Jury.

Soyez assuré de nos sentiments dévoués.

Monsieur le Docteur J. LATRILLE

Maître de Conférences, Agrégé de Bactériologie et Virologie
Biologiste des Hôpitaux
Docteur ès Sciences.

Ayant eu le privilège de suivre votre enseignement pendant nos études, nous sommes particulièrement heureux de vous compter parmi nos juges.

Nous vous en remerçions.

Monsieur le Professeur R. TESSIER

Professeur sans chaire de Pneumo-Phtisiologie
Médecin des Hôpitaux
Chef de Service
Chevalier de l'Ordre National du Mérite
Croix de Guerre 1939-1945
Chevalier des Palmes Académiques.

Nous sommes très sensible à l'honneur que vous nous faîtes en acceptant de siéger à notre Jury.

Nous vous en remercions et nous vous assurons de nos sentiments respectueux.

A NOTRE PRESIDENT DE THESE

Monsieur le Professeur J.DUHAMEL

Professeur de Physique Médicale et Pharmaceutique
Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique
Electroradiologiste des Hôpitaux
Chef de Service
Officier des Palmes Académiques
Chevalier de la Santé Publique.

Vous êtes l'inspirateur de ce travail, nous avons bénéficié de vos conseils qui nous ont fait apprécier l'étendue de vos connaissances, et surtout votre intelligence des vrais problèmes, ceux que les classiques évitent avec précaution.

Nous sommes heureux de pouvoir aujourd'hui vous exprimer notre reconnaissance et vous témoigner notre attachement.

LE TEST G.

PLAN

INTRODUCTION.

CHAPITRE I - ETUDE THEORIQUE.

1 - DEFINITION du TEST G.
2 - INTERPRETATION DU TEST G.
3 - DISTRIBUTION DE PROBABILITE DE G.
4 - CONCLUSION DE L'ETUDE THEORIQUE.

CHAPITRE II - UTILISATION PRATIQUE.

1 - TABLEAUX DE CONTINGENCE.
2 - FORME PARTICULIERE DE G.
3 - EXEMPLE DE CALCUL DE G.
4- COMPARAISON AVEC LE CALCUL DE X^2.

CHAPITRE III - ETUDE DE LA VALIDITE DU TEST.

1 - METHODE EXACTE DE FISHER.
2 - TEST DE LA TABLE A QUATRE CASES.
3 - TABLEAUX DE COMPARAISON.
4 - INTERPRETATION DES TABLEAUX DE COMPARAISON.

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

TABLES STATISTIQUES.

INTRODUCTION

L'objet de notre thèse est un test statistique peu connu : le test G.

Nous développons dans le premier chapitre la théorie mathématique de ce test car pour l'utiliser, il est au moins nécessaire de respecter ses conditions théoriques de validité.

Le deuxième chapitre montre l'intérêt principal du test G : une exceptionnelle simplicité de calcul et d'interprétation, ce qui le rend immédiatement accessible au médecin le moins préparé aux statistiques.

Nous avons vérifié dans le troisième chapitre que l'erreur systématique introduite par le test était négligeable.

Pour ces raisons, notre conclusion est favorable à l'utilisation du test G.

Les tables nécessaires sont publiées à la fin de ce travail.

CHAPITRE I :

- ETUDE THEORIQUE -

I - DEFINITION DU TEST G

Le test G est fondé sur la théorie du maximum de vraisemblance (FISHER 1922) (6).

Considérons un échantillon de taille n, prélevé dans une population quelconque par n opérations successives de tirage au sort, divisons le en m classes d'effectifs observés * O_i :

$$O_1, O_2, O_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots O_m$$

$$\sum_{i=1}^{m} O_i = n$$

Appelons p la probabilité d'obtenir une fois la classe i lors d'une opération de tirage au sort ; à chacune des m classes correspond la probabilité p_i :

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_m$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

La distribution de probabilité des différents échantillons que le hasard permettrait d'obtenir à partir de cette population est une distribution multinomiale : la probabilité d'obtenir l'échantillon que nous avons décrit est donc :

$$(1)\quad P = \frac{n!}{O_1!\, O_2!\, O_3! \ldots\ldots O_m!} \cdot p_1^{O_1} \cdot p_2^{O_2} \cdot p_3^{O_3} \ldots\ldots\ldots p_m^{O_m}$$

(*) Nous noterons 0 le chiffre zéro, O la lettre O.

Choisissons une hypothèse de travail H : elle nous permet de calculer pour chaque classe les effectifs théoriques E_i :

$$E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_m$$

$$\sum_{i=1}^{m} E_i = n$$

Si cette hypothèse de travail était exacte :

- la probabilité p d'obtenir, par hasard, une fois la classe i serait :

$$p_i\ (H) = \frac{E_i}{n}$$

- la probabilité d'obtenir l'échantillon observé serait d'après (1)

$$(2)\quad P\ (H) = \frac{n\ !}{O_1!\ O_2!\ O_3!\ \ldots\ldots\ O_m\ !} \left(\frac{E_1}{n}\right)^{O_1} \left(\frac{E_2}{n}\right)^{O_2} \left(\frac{E_3}{n}\right)^{O_3} \ldots\ldots \left(\frac{E_m}{n}\right)^{O_m}$$

La théorie du maximum de vraisemblance tire son nom de ce qu'elle considère que parmi les hypothèses H, la plus vraisemblable, R, est celle qui permettrait de calculer des effectifs théoriques $E_i\ (R)$ identiques aux effectifs réellement observés O_i :

$$E_i\ (R) \equiv O_i$$

Alors la probabilité p d'obtenir , par hasard, une fois la classe i est :

$$p_i(\ R\ ) = \frac{O_i}{n}$$

La probabilité, selon R, d'obtenir l'échantillon observé est :

$$(3)\quad P\ (R) = \frac{n\ !}{O_1!\ O_2!\ O_3\ !\ldots\ldots\ldots O_m!} \cdot \left(\frac{O_1}{n}\right)^{O_1} \left(\frac{O_2}{n}\right)^{O_2} \left(\frac{O_3}{n}\right)^{O_3} \ldots\ldots \left(\frac{O_m}{n}\right)^{O_m}$$

Pour comparer les deux hypothèses H et R, formons le rapport des probabilités P (R) et P (H) , ou " rapport de vraisemblance " :

$$\frac{P(R)}{P(H)} = \left(\frac{O_1}{E_1}\right)^{O_1} \cdot \left(\frac{O_2}{E_2}\right)^{O_2} \cdot \left(\frac{O_3}{E_3}\right)^{O_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \left(\frac{O_m}{E_m}\right)^{O_m}$$

Prenons le logarithme :

$$\text{Log } \frac{P(R)}{P(H)} = O_1 \text{ Log } \frac{O_1}{E_1} + O_2 \text{ Log } \frac{O_2}{E_2} + O_3 \text{Log} \frac{O_3}{E_3} + \ldots + O_m \text{ Log } \frac{O_m}{E_m}$$

$$(4) \quad \text{Log } \frac{P(R)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{m} O_i \text{ Log } \frac{O_i}{E_i}$$

En pratique et pour une raison que nous justifierons, on n'utilise pas directement (4) , mais le double en posant :

$$(5) \quad G = 2 \sum_{i=1}^{m} O_i \text{ Log } \frac{O_i}{E_i}$$

Cette formule définit le test G ou test du logarithme du rapport de vraisemblance (log. likelihood ratio test des Anglo-Saxons.)

Cette définition de G doit être complétée par deux remarques :

1/ Les logarithmes sont népériens : lorsqu'on effectue les calculs à l'aide d'une table de logarithmes décimaux, il est nécessaire de multiplier par le facteur :

$$\frac{1}{\text{Log}_e 10} = 2{,}302\ldots$$

Selon la manière dont on conduit les calculs on utilisera l'une ou l'autre des formules :

$$(5)' \quad G = 2{,}302 \sum_{i=1}^{m} 2\, O_i \log_{10} \frac{O_i}{E_i}$$

$$(5)'' \quad G = 4{,}604 \sum_{i=1}^{m} O_i \log_{10} \frac{O_i}{E_i}$$

2/ La formule (5) ne peut pas être employée pour les classes à effectif théorique ou observé , nul puisque :

$$\text{Log } x \to -\infty \quad \text{si} \quad x \to 0$$

Cette indétermination peut être levée :

a) Pour les classes telles que :

$$O_i = 0$$

$$E_i \neq 0$$

La probabilité d'obtenir un effectif de un est :

$$p_i\,(R) : \text{ indéterminé}$$

$$p_i\,(H) = \frac{E_1}{n}$$

La probabilité d'obtenir l'échantillon observé selon H ou R, s'écrit avec comme facteurs correspondant aux classes d'effectif nul :

- pour P (R) :

$$O_i ! = 0 ! = 1$$

$$p_i(R)^{O_i} = p_i(R)^{0} = 1$$

- pour P (H)

$$O_i ! = 0 ! = 1$$

$$\left(\frac{E_i}{n}\right)^{O_i} = \left(\frac{E_i}{n}\right)^{0} = 1$$

- d'où le facteur 1 dans le rapport de vraisemblance et dans la somme G le terme :

$$\text{Log } 1 = 0$$

Pour calculer G, il suffit de ne pas tenir compte des classes d'effectif nul.

b) Pour les classes telles que :

$$E_i = 0$$

$$O_i \neq 0$$

Les probabilités élémentaires sont :

$$p_i (H) \qquad \text{indéterminée}$$

$$p_i (R) = \frac{O_i}{n}$$

Nous aurons donc les facteurs correspondants :

- Pour P (R) :

$$O_i ! \quad \text{et} \quad \left(\frac{O_i}{n}\right)^{O_i}$$

- Pour P (H)

$$O_i ! \quad \text{et} \quad \left(p_i (H)\right)^{O_i}$$

- Pour le rapport de vraisemblance :

$$\left(\frac{O_i}{p_i(H)\ n} \right)^{O_i}$$

- Dans la somme G, le terme :

$$O_i \text{ Log } \frac{O_i}{n.p(H)} = O_i \text{ Log } \frac{O_i}{n} - O_i \text{ Log } p$$

Nous proposons de choisir comme valeur de la probabilité indéterminée le seuil de risque que l'on s'est donné : dire que l'hypothèse H entraine que telle classe a un effectif théorique nul, ne veut pas dire qu'il va effectivement être nul mais qu'au seuil de 1% il y a 99 chances sur 100 pour qu'il soit nul et 1 pour qu'il ne le soit pas.

Au seuil 5% :

$$O_i \text{ Log } \frac{O_i}{n\ p_i(H)} = 2{,}30 \left(O_i \log \frac{O_i}{n} + 1{,}3\ O_i \right)$$

Au seuil 1% :

$$O_i \text{ Log } \frac{O_i}{n\ p_i(H)} = 2{,}30 \left(O_i \log_{10} \frac{O_i}{n} + 2\ O_i \right)$$

Grace à cette convention, le calcul numérique de G devient possible mais le problème n'est que déplacé : Quelle interprétation pourra-t-on donner aux valeurs calculées dans ces conditions ?

II - INTERPRETATION DU TEST.

La valeur de G exprime la différence entre la théorie et l'expérimentation ; en effet, la simple lecture de la formule de définition de G , nous montre que :

- si les effectifs théoriques et observés sont identiques, G est nul,
- s'ils sont peu différents, G est voisin de zéro,
- que plus ces effectifs diffèrent, plus G augmente.

Autrement dit ,

- un G " petit " annonce une " bonne " hypothèse.
- un G " grand " condamne une " mauvaise"hypothèse.

Ceci pour présenter le test d'une façon rapide et imagée. Bien entendu, l'appréciation subjective de la valeur de G, par exemple " petite " pour 1 ou 2, " grande " pour 5, 6 ou 7, ne serait pas sérieuse.

Pour pouvoir interpréter le test il est nécessaire de connaître la distribution de probabilité cumulée :

$$f(G) = \text{Prob.} \left(G_{\text{hasard}} \geqslant G_{\text{calculé}} \right)$$

qui nous indique pour chaque valeur de G, quelle est la probabilité d'obtenir, par le seul jeu du hasard une valeur de G égale ou supérieure.

Pour nous exprimer de façon plus concrète, donnons deux exemples d'interprétation du test G en prenant des valeurs numériques arbitraires pour G et la probabilité cumulée correspondante.

Exemple 1

On a calculé : $G = 10$

Supposons que : $\text{Prob.} \left(G_{\text{hasard}} \geqslant 10 \right) = \frac{1}{100}$

Interprétation :

La différence entre effectifs théoriques et observés est telle que nous n'avons qu'une chance sur cent pour que ce soit le fait du hasard.

Si nous acceptons le risque de nous tromper une fois sur cent, nous pouvons affirmer :

- l'hypothèse H est contredite par l'expérience.

Exemple 2

On a calculé : $G = 2$

Supposons que :

$$\text{Prob}\left(G_{\text{hasard}} \geqslant 2 \right) = \frac{20}{100}$$

Interprétation :

La différence entre effectifs théoriques et observés est telle que nous avons vingt chances sur cent pour que ce soit uniquement du au hasard.

Si nous refusons de courir un risque qui nous paraît trop grand : deux fois sur dix , nous dirons que :

- l'hypothèse H n'est pas contredite par l'expérience.

Ce qui ne veut pas dire que H est " vraie ", nous n'avons pas réussi à la mettre en défaut, c'est tout. Remarque capitale car il arrive que des utilisateurs de tests, insuffisamment formés au raisonnement statistique, passent outre à cette réserve et pensent avoir " démontré " l'hypothèse H.

G est un test de non concordance (11) , le raisonnement serait exactement le même pour le test χ^2 de Pearson .

III - LOI DE DISTRIBUTION DE G

A notre connaissance la distribution de probabilité de G n'a jamais été calculée : cette ignorance est une des principales raisons qui font que ce test n'a pas encore obtenu la faveur que ses fondements théoriques justifieraient.

Pour contourner cette difficulté, il est nécessaire de recourir à un artifice mathématique , le développement en série de (4), formule qui, pour une classe s'écrit :

$$f(O) = O \operatorname{Log} \frac{O}{E}$$

ou encore :

$$f(O) = O \operatorname{Log} \left(1 + \frac{O-E}{E} \right)$$

effectuons le changement de variable :

$$x = \frac{O-E}{E}$$

il vient :

$$f(x) = E \cdot (1 + x) \operatorname{Log} (1 + x)$$

Les dérivées successives sont :

$$f'(x) = E + E \operatorname{Log} (1 + x)$$
$$f''(x) = E \cdot (1 + x)^{-1}$$
$$f'''(x) = -1 \cdot E (1 + x)^{-2}$$
$$f^{IV}(x) = +1 \cdot 2 \cdot E (4 + x)^{-3}$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (n - 2)! \, E (1 + x)^{-n+1}$$

Pour x nul nous avons :

$$f(O) = 0$$
$$f'(O) = E$$
$$f''(O) = E$$
$$f'''(O) = -E$$
$$f^{IV}(O) = +2E$$
$$f^{(n)}(O) = (-1)^n (n - 2)! E$$

Le développement en série selon la formule de Mac Laurin s'écrit :

$$0 + E.\frac{x}{1!} + E.\frac{x^2}{2!} - E\frac{x^3}{3!} + 2E\frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n (n-2)!E.\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Remplaçons x par sa valeur , il vient :

$$E.\frac{(O-E)}{1!E} + E\frac{(O-E)^2}{2!E^2} - E.\frac{(O-E)^3}{3!E^3} + 2E\frac{(O-E)^4}{4!E^4} + \ldots + (-1)^n (n-2)!E\frac{(O-E)^n}{n!E^n} + \ldots$$

Simplifions et effectuons la somme étendue aux m classes : les deux premiers termes s'annulent puisque :

$$\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{i=1}^{m} E_i = n$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{m} f(O_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{(O-E)^2}{E} - \frac{(O-E)^3}{6E^2} + \frac{(O-E)^4}{12E^3} + \ldots + (-1)^n \frac{(O-E)^n}{n(n-1)E^{n-1}} + \ldots \right)$$

Dans le premier terme nous reconnaisons le test X^2 de PEARSON :

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O-E)^2}{E}$$

Le facteur 2 que nous avions introduit arbitrairement en posant :

$$G = 2 \sum_{i=1}^{m} f(O_i)$$

se justifie maintenant puisque celà permet d'écrire :

$$G = X^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n.(n-1)} \frac{(O-E)^n}{E^{n-1}}$$

Etudions la convergence de cette série :

a) Est-elle absoluement convergente ?

$$U_n = (-1)^n \frac{2\,(O-E)^n}{n\,(n-1)\,E^{n-1}}$$

$$U_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{2(O-E)^{n+1}}{(n+1)\,.\,n\,.\,E^n}$$

$$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{n-1}{n+1} \frac{|O-E|}{E}$$

- Si $n \to \infty$

$$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} \to \frac{|O-E|}{E}$$

. La série est absoluement convergente si :

$$\frac{|O-E|}{E} < 1$$

-lorsque : $O-E < 0$, cette condition est toujours remplie.

-lorsque : $O-E > 0$, il faut que ,

$$O < 2E$$

condition qui d'ailleurs inclut la précédente.

b) Dans le cas contraire :

La série est non absoluement convergente, mais elle pourrait être convergente. C'est une série alternée puisque :

$$O-E > 0$$

$$U_n = (-1)^n \quad \frac{2\ (O-E)}{n\ (n-1)} \quad \left(\frac{O-E}{E} \right)^{n-1}$$

comme

$$\frac{O-E}{E} > 1$$

si $n \rightarrow \infty$, $U_n \rightarrow \infty$

. La série est divergente .

c) Dans le cas particulier :

$$O = 2\ E$$

$$\frac{O-E}{E} = 1$$

Si $n \rightarrow \infty$, $U_n \rightarrow 0$

La série est convergente.

Ces conditions de convergence entraînent les conclusions suivantes :

Si, pour chacune de M classes, l'effectif observé est inférieur ou égal au double de l'effectif théorique :

$$O_i \leq 2\ E_i$$

chaque série est convergente et en se limitant au terme du deuxième degré, on peut écrire :

$$G \simeq X^2$$

Avec une approximation Δ

$$G = X^2 + \Delta$$

Approximation qui est la somme des restes δ_i de chaque série :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \delta i$$

Les valeurs de G et de X^2 étant peu différentes, nous admettrons que la distribution de probabilité de G, inconnue, est très voisine de celle bien classique , de X^2.

L'utilisation du test devient possible :

- Calcul de G selon (5)
- Calcul du nombre de degrés de liberté ν
- Lecture du seuil correspondant sans une table de χ^2 à ν degré de liberté.

Si, au contraire, pour une seule des m classes , l'effectif observé est plus grand que le double de l'effectif théorique :

$$O_i > 2 E_i$$

La série correspondante est divergente, il est impossible de se limiter à son premier terme. La valeur de G est différente de la valeur de la statistique X^2 que l'on pourrait calculer pour le même échantillon, la distribution de probabilité de G demeure inconnue.

Toutefois FISHER (8) et COCHRAN (3) ont montré non par un calcul théorique, mais de façon empirique que dans le domaine ou G et X^2 sont nettement différents, G continue à suivre une loi de distribution de χ^2 alors que X^2 s'en écarte.

Le problème demeure posé, faute d'une étude suffisamment approfondie et il est important.

IV - CONCLUSION DE L'ETUDE THEORIQUE DE G

La démonstration qui aboutit à G est extrêmement rigoureuse : la plupart des tests d'emploi courant aujourd'hui n'ont pas un fondement théorique aussi solide. L'hypothèse que pour cette raison le test de G doit leur être supérieur- sous réserve que ce soit vérifié de façon pratique et de préciser dans quelles limites - a été formulée par de nombreux auteurs (6) ,(15), (5),

C'est en particulier le cas pour le test de PEARSON dont nous avons vu les rapports étroits avec G : l'idée d'une supériorité possible du test de G sur le χ^2 présente un grand intérêt en raison, d'une part de la très large diffusion du test de PEARSON, d'autre part en raison du problème épineux et très controversé de ses limites d'emploi.

En effet, si l'on connait parfaitement la loi de distribution de la variable aléatoire χ^2 somme de ν variables aléatoires indépendantes, (elles-mêmes carrés de variables aléatoires , toutes distribuées selon des lois de Laplace-Gauss de variance unité et de moyenne nulle) , par contre lorsqu'on calcule :

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O-E)^2}{E}$$

la statistique X^2 n'est qu'approximativement distribuée selon une loi de χ^2: ce n'est que lorsque n tend vers l'infini que la loi de distribution de X^2 converge vers une loi de χ^2 (7)

La rapidité de cette convergence n'a jamais été assez nettement évaluée pour que les limites pratiques d'emploi de X^2 soient clairement définies (10).

Les articles fondamentaux sur cette question sont ceux de COCHRAN (4) et VESSEREAU (20). Sans entrer dans cette polémique (17) (2) (14) rappellons l'usage- arbitraire (18) - de limiter l'emploi de X^2 aux cas ou :

$$n \geq 40$$

ou bien $40 > n > 20$ avec $E_i \geq 5$

Or justement en médecine, les petits échantillons sont ceux pour lesquels on voudrait le plus être renseigné : ce qui justifie l'étude plus approfondie de G dans ce domaine.

Mais le médecin, ou le biologiste , non spécialiste des statistiques, désire des tests simples,de calcul facile : le test de PEARSON joue aujourd'hui ce rôle:

- sa publicité est faite, son emploi est quotidien, l'étudiant l'utilise dès les épreuves du concours d'entrée en Médecine.

- sa présentation simplifiée sous forme de " recette de cuisine " favorise sa diffusion - et aussi un emploi souvent abusif (5).

- le calcul de X^2 enfin, sans être rapide est du moins toujours réalisable même sans machine à calculer.

Le Test G, au contraire, demeure un inconnu sauf de quelques spécialistes, il est à peine cité dans les principaux traités de statistiques (19) (12) (1) (13). Le calcul de G, qui dans le cas général, nécessite l'emploi d'une table de logarithmes est aussi long, sinon plus que celui de X^2 .

Ces raisons pratiques, plus le doute qui subsiste sur la loi de distribution, expliquent que G n'ait pas remplacé le test de PEARSON.

Nous désirons montrer dans notre thèse, que grace aux travaux de WOOLF qui l'a tabulé dans le cas particulier des tableaux de contingence pour l'indépendance des caractères (21) , le test G dépasse le χ^2 en rapidité de calcul et en simplicité d'emploi :

Avantages concrets que le médecin doit apprécier, d'autant que les tableaux de contingence se rencontrent très souvent.

Le test G ne devenant un test " vivant " que dans ces conditions, c'est essentiellement pour de tels tableaux de contingence que nous étudierons les limites de validité de G pour les petits échantillons et pour les classes à faible effectif.

CHAPITRE II :

- UTILISATION PRATIQUE -

I- TABLEAUX DE CONTINGENCE RELATIFS A L'INDEPENDANCE DE DEUX SERIES DE CARACTERES

Classons un lot de taille n par rapport à deux séries de caractères A et B : on peut dresser un tableau de contingence formé : de colonnes

- de colonnes A_i (indice i de 1 à c)
- de rangs B_j (indice j de 1 à r)

en tout :

- m classes d'effectif observé O_{ij}

$$m = c.r$$

A / B	A_1	A_2	A_3		A_i		A_c	total
B_1	O_{11}	O_{21}	O_{31}	....				R_1
B_2	O_{12}	O_{22}	.	....				R_2
B_3	O_{13}	..	.	....				R_3
B_j					O_{ij}			R_j
B_r								B_r
total	C_1	C_2			C_i		C_c	n

. pour chaque rang le total marginal est :

$$R_j = \sum_{i=1}^{c} O_{ij}$$

. pour chaque colonne :

$$C_i = \sum_{j=1}^{r} O_{ij}$$

. pour l'ensemble du tableau

$$n = \sum_{j=1}^{r} R_j = \sum_{i=1}^{c} C_i = \sum_{1}^{m} O_{ij}$$

- Posons le problème suivant : existe-t-il une liaison entre les caractères A et les caractères B ? L'hypothèse nulle (H_o) étant qu'il n'existe aucune liaison : A et B sont des caractères indépendants , distribués au hasard l'un par rapport à l'autre.

Les effectifs théoriques E_{ij} calculés moyennant (H_o) sont donc :

$$(6) \qquad E_{ij} = \frac{R_j \, C_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{m} E_{ij} = n$$

Nous avons ainsi défini un tableau de contingence relatif à l'indépendance des caractères, dont le nombre de degrés de liberté est :

$$\nu = (c - 1) (r - 1)$$

II- FORME PARTICULIERE DE G DANS LES TABLEAUX DE CONTINGENCE RELATIFS A L'INDEPENDANCE DES CARACTERES

Le test G pour ces tableaux s'écrit :

$$G = 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} O_{ij} \left(\text{Log } O_{ij} - \text{Log } E_{ij} \right)$$

en posant :

$$\sum_{1}^{m} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c}$$

Remplaçons E_{ij} par sa valeur (6) :

$$G = 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} O_{ij} \left(\text{Log } O_{ij} - \text{Log } R_j - \text{Log } C_i + \text{Log } n \right)$$

Considérons le deuxième terme : pour une rangée lorsqu'on effectue la somme de 1 jusqu'à c, le total marginal R_j reste constant, on peut donc écrire:

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} O_{ij} \text{ Log } R_j = \sum_{j=1}^{r} \text{Log } R_j \sum_{i=1}^{c} O_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \left(\text{Log } R_j . R_j \right)$$

De même pour le troisième terme :

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} O_{ij} \text{ Log } C_i = \sum_{i=1}^{c} \left(\text{Log } C_i . C_i \right)$$

Quand au dernier terme :

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} O_{ij} \text{ Log } n = \text{Log } n \sum_{1}^{m} O_{ij} = \text{Log } n . n$$

Développons G en utilisant ces résultats :

$$G = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} 2\, O_{ij} \operatorname{Log} O_{ij} - \sum_{j=1}^{r} 2R_j \operatorname{Log} R_j - \sum_{i=1}^{c} 2C_i \operatorname{Log} C_i + 2n \operatorname{Log} n$$

Cette formule , à première vue semble " très lourde " en réalité elle est très simple si on remarque que G est la somme de termes du type :

$$g(x) = 2 \,.\, x \operatorname{Log} x$$

$$G = \sum_{1}^{m} g(O_{ij}) - \sum_{j=1}^{r} g(R_j) - \sum_{i=1}^{c} g(C_i) + g(n)$$

Ce qui signifie que pour calculer G il faut :

- additionner les nombres $g(O_{ij})$ relatifs à chacune des cases du tableau (1er terme)
- retrancher les nombres $g(R_j)$ et $g(C_i)$ relatifs à chaque total marginal.
- additionner enfin le nombre g (n) correspondant à l'effectif total.

Ce mode de calcul peut être illustré par le schéma :

Les nombres g(x) ont été tabulés par WOOLF (21) pour x entier de 1 à 2009. Nous reproduisons page 69 un extrait de cette table.

Si l'on désire utiliser la correction de continuité de Yates, WOOLF a également tabulé $g\left(x - \frac{1}{2}\right)$ jusqu'à 299,5.

Remarquons que les effectifs théoriques E_{ij} disparaissent de l'expression de G :avantage important, il n'est pas nécessaire de les calculer. Le calcul de G est donc extrèmement simple, il suffit de faire la somme des nombres g(x) lus dans la table.

III- EXEMPLE DE CALCUL DE G

Soit le tableau :

B \ A					total
	6	8	10	16	40
	9	11	15	19	54
	13	14	20	28	75
	17	18	26	40	101
total	45	51	71	103	270

Nous lisons directement dans la table de WOOLF les nombres g(x) :

-Somme des termes positifs :

g (6)	=	21,5011
g (8)	=	33,2711
g (10)	=	46,0517
g (16)	=	88,7228
g (9)	=	39,5000
g (11)	=	52,7537
g (15)	=	81,2415
g (19)	=	111,8887
g (13)	=	66,6887
g (14)	=	73,8936
g (20)	=	119,8393
g (28)	=	186,6035
g (17)	=	96,3293
g (18)	=	104,0534
g (26)	=	169,4210
g (40)	=	295,1104
g (270)	=	3023,1479
		4610,0577

- Somme des termes négatifs :

g (40)	=	295,1104
g (54)	=	430,8103
g (75)	=	647,6232
g (101)	=	932,2543
g (45)	=	342,5996
g (51)	=	401,0462
g (71)	=	605,3005
g (103)	=	954,7542
		4609,4987

4610,0577
4609,4987

G = 0,5590

Nous avons effectué le calcul avec quatre décimales pour montrer la parfaite concordance avec X^2, en effet, nous avons calculé par ailleurs, pour le même tableau :

$$X^2 = 0,5558$$

Le résultat avec deux décimales seulement aurait été :

$$G = 0,52$$

précision bien suffisante , ce qui rend les additions plus rapides.

IV - COMPARAISON AVEC LE CALCUL DE X^2

Rappelons que :

$$X^2 = \sum_{1}^{m} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Considérons la classe d'effectif observé 6, en haut à gauche du tableau, pour calculer X^2 , nous devons :

1/ Calculer E :

- une multiplication : 40 . 45 = 1800
- une division : 1800 : 270 = 6,66

2/ Calculer (O - E) :

- une soustraction : 6 - 6,66 = - 0,66

3/ Elever au carré :

- une multiplication : (-0,66) (-0,66) = 0,44

4/ Diviser par E :

- une division : 0,44 : 0,66 = 0,66

Il faut répéter ces opérations pour les seize cases du tableau, soit en tout :

- 32 multiplications,
- 32 divisions,
- 16 soustractions.

Enfin ces résultats partiels doivent être additionnés.

Cette longue succession d'opérations, même élémentaires est fastidieuse : la comparaison avec G est évidente.

Le test G pour les tableaux de contingence relatifs à l'indépendance des caractères est bien plus rapide à calculer que le test de PEARSON.

CHAPITRE III :

- ETUDE DE LA VALIDITE DU TEST -

I- METHODE EXACTE DE FISHER

Pour les échantillons de petite taille la distribution de probabilité suit la loi hypergéométrique:

$$p_a = \frac{\binom{a}{C_1}\binom{b}{C_2}}{\binom{R_1}{n}} = \frac{C_1 ! \, C_2 ! \, R_1 ! \, R_2 !}{a ! \, b ! \, c ! \, d ! \, n !}$$

p_a exprime la probabilité d'obtenir le tableau

a	b	R_1
c	d	R_2
C_1	C_2	n

(tableau présenté de telle sorte que : $a \leqslant b$; $R_1 \leqslant R_2$)

La méthode exacte de FISHER consiste à calculer la probabilité cumulée P :

$$P = p_a + p_{(a-1)} + p_{(a-2)} + \ldots\ldots + p_1 + p_0$$

somme de la probabilité p_a associée au tableau et de celles de chacun des tableaux plus significatifs caractérisés par les valeurs de a :

$$(a-1) \, , (a-2) \, , (a-3), \ldots\ldots \quad 2, 1, 0$$

Tous ces tableaux ayant des totaux marginaux constants, ce sont les effectifs b, c, d, qui varient :

$$(c+1) \, , (c+2) \, , (c + 3) \, , \ldots\ldots \quad , (C_1 - 1), C_1$$

$$(b+1) \, , (b+2) \, , (b + 3), \ldots\ldots \quad , (R_1 - 1), R_1$$

$$(d-1) \, , (d-2) \, , (d - 3), \ldots\ldots \quad , \; 1 \; , 0$$

Donnons un exemple :

3	10	13
8	5	13
11	15	26

A ce tableau correspond la probabilité p_3 :

$$p_3 = \frac{13!\ 13!\ 11!\ 15!}{3!\ 10!\ 8!\ 5!\ 26!} = \frac{11.\ 13.\ 9.\ 11}{17.\ 19.\ 23.40} = 0{,}04764$$

Les tableaux plus significatifs sont :

2	11
9	4

$$p_2 = p_3 \cdot \frac{3 \cdot 5}{11.9} = 0{,}007218$$

1	12
10	3

$$p_1 = p_2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{12 \cdot 10} = 0{,}000481$$

0	13
11	2

$$p_0 = p_1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{13 \cdot 11} = 0{,}000010$$

$$P_{\text{cumulée}} = p_3 + p_2 + p_1 + p_0 = 0{,}055350$$

Cette méthode est bien comme elle le prétend une méthode exacte,mais les calculs sont longs et fastidieux, leur difficulté croît en fonction de a et de n. Pour cette raison il n'aurait pas été possible d'effectuer un très grand nombre de fois ces calculs, sinon par ordinateur : nous ne l'utiliserons que pour quelques cas particuliers lorsque nous voudrons connaître la probabilité exacte.

La solution pratique consiste à comparer G au " test de la table à quatre cases ".

Ce test est pratique parce qu'il est tabulé : on le trouve par exemple dans les Tables scientifiques Geigy (pages 109 à 203).

Il se présente sous un aspect bien différent de la méthode exacte de FISHER, mais sa signification est la même car il a été tabulé grace à des calculs conduits selon cette méthode.

Comme son nom l'indique, ce test n'est adapté qu'aux seuls tableaux de contingence à deux colonnes et deux rangées, ce qui limitera notre étude à ce cas.

II - TEST DE LA TABLE A QUATRE CASES.

La typographie utilisée dans les tables de ce test, se rapporte au tableau de contingence :

x_1	$N_1 - x_1$	N_1
x_2	$N_2 - x_2$	N_2
X	$N - X$	N

L'écriture est différente ,mais la signification est identique à la notre : (a,b,c,d, C_1, C_2, R_1, R_2, n)

Pour lire ces tables :

1/ Le tableau de contingence étudié doit être présenté de sorte que :

$$x_1 \leq N_1 - x_1$$

$$N_1 \leq N_2$$

2/ On cherche le paramètre N , puis N_1 enfin x_1 ,la table indique alors au seuil choisi les valeurs limites X_g et X_d de X telles que :

a) Si $X_g < X < X_d$

l'hypothèse d'indépendance n'est pas infirmée.

b) Si $X \leq X_g$, ou si , $X_d \leq X$

l'hypothèse d'indépendance des deux séries de caractères doit être rejetée.

Le seuil indiqué est 2α car il concerne les valeurs extrêmes de X aussi bien les petites valeurs que les grandes, du moment qu'elles sont extérieures à l'intervalle X_g, X_d .

Au contraire, la méthode exacte de FISHER ne tient compte des valeurs extrêmes que d'un seul côté : comme la distribution hypergéométrique est symétrique , le seuil global 2α correspond aux seuils :

$$\alpha \text{ pour } X \leqslant X_g$$

$$\alpha \text{ pour } X \geqslant X_d$$

Ainsi pour étudier G au seuil α nous utiliserons les limites de signification pour le test de la table à quatre cases au seuil 2α.

III- TABLEAUX DE COMPARAISON DES RESULTATS DU TEST G ET DU TEST DE LA TABLE A QUATRE CASES.

Nous avons procédé de la façon suivante :

1/ Nous avons choisi arbitrairement des couples de valeurs N , N_1 :

- toutes les valeurs de N de 8 à 26, ces petits échantillons étant"suspects ".

- au delà nous nous sommes limités à quelques valeurs espacées.

- pour une valeur donné de N nous n'avons étudié que la plus grande valeur possible de N_1 :

comme $N_1 \leqslant N$

pour N pair $N_1 = \frac{N}{2}$

pour N impair $N_1 = \frac{N - 1}{2}$

2/ Pour un couple (N , N_1) donné nous avons dressé un tableau à double entrée en inscrivant :

- verticalement : toutes les valeurs possibles de x_1

C'est à dire puisque $x_1 \leqslant N_1 - x_1$

$$x_1 \leqslant \frac{N_1}{2}$$

pour N_1 pair :

$$x_1 = 0, 1, 2 \ldots\ldots \frac{N_1}{2}$$

pour N_1 impair

$$x_1 = 0 , 1, 2 \ldots\ldots \frac{N_1 - 1}{2}$$

- horizontalement : toutes les valeurs possibles de X :

de la plus petite : $X_{min} = x_1$

à la plus grande : $X_{max} = N - N_1 + x_1$

Chaque case du tableau correspond à une distribution donnée, définie par les quatres paramètres N, N_1, x_1 , X qui permettrent de calculer les autres éléments.

Nous n'avons étudié d'une façon vraiement systématique que le seuil de signification à 5% qui est représenté sur le tableau par un trait renforcé, à gauche du tableau ce trait correspond à la valeur limite X_g, à droite du tableau à la valeur X_d. Entre les deux traits s'étend le domaine des distributions non significatives à 5%,à droite et à gauche de ce domaine, les distributions pour lesquelles l'hypothèse d'indépendance doit être rejetée au seuil 5%.

La valeur de G est inscrite dans la case correspondante. Nous avons effectué les calculs avec deux décimales sans arrondir à la valeur supérieure les nombres g (x) lus dans la table de WOOLF. La précision de G est donc telle que :

$$G - 0,04 < G < G + 0,05$$

Rappellons pour aider la lecture de nos tableaux que pour χ^2 à un degré de liberté les seuils usuels sont :

χ^2	=	2,70	α	=	0,10
χ^2	=	3,84	α	=	0,05
χ^2	=	5,41	α	=	0,02
χ^2	=	6,64	α	=	0,01

Pour les valeurs de G voisines de 3,84 nous avons repris le calcul avec quatre décimales et c'est cette dernière valeur qui est inscrite.

Nous avons calculé G pour toutes les distributions possibles dans un certain nombre de tableaux : cela nous a montré de façon empirique que les variations de G sont monotones soit croissantes , soit décroissantes. Lorsqu'il existe un minimum ceci reste vrai de part et d'autre de lui.

Ces variations monotones s'observent aussi bien le long d'une rangée , d'une colonne que d'une diagonale.

Il en résulte que le calcul de G n'est nécessaire que pour les cases situées de part et d'autre du seuil de signification étudié : les cases suivantes ont de façon évidente, à la seule lecture du tableau, une valeur de G soit supérieure , soit inférieure à la précédente.

Signalons enfin, que nous n'avons pas utilisé la correction de continuité de YATES en raison des récents travaux qui ont montré son caractère artificiel (9) (16) .

N=8, N_1=4

x / X	1	2	3	4	5	6
2		3,45	0,54	0,00	0,54	3,45
1	1,53	0,00	0,54	2,09	6,09	
0	1,53	3,45	6,09	11,09		

N=9, N_1=4

x / X	1	2	3	4	5	6	7
2		4,99	0,91	0,09	0,09	0,91	4,99
1	1,78	0,04	0,23	1,14	2,87	6,96	
0	1,28	2,81	4,73	7,37	12,37		

N=10, N_1=5

x / X	1	2	3	4	5	6	7
2		3,28	0,49	0,00	0,41	1,73	5,49
1	1,50	0,01	0,49	1,73	3,87*	8,46	
0	1,50	3,28	5,49	8,46	13,87		

N=11, N_1= 5

x / X	1	2	3	4	5	6	7	8
2		3,70	0,75	0,05	0,11	0,79	2,28	6,16
1	1,70	0,02	0,25	1,10	2,43	4,75*	9,42	
0	1,29	2,79	4,57	6,77*	9,84	15,16		

N=12 N_1= 6

x \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3			5,17	1,54	0,34		0,34	1,54	5,17
2		3,17	0,44		0 34	1,35	3,25	7,63	
1	1,47	0,00	0,44	1,54	3,25	5,81	10,89		
0	1,47	3,17	5,17	7,63	10,89				

N=13 N_1=6

x \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			5,72	1,92	0,62	0,06	0,06	0,62	1,98	5,72
2		3,52					1,92	3,94*	8,40	
1	1,64					4,15*	6,79			
0	1,31		4,48	6,48						

N=14 N_1=7

x \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			4,99	1,45					2,95	7,19
2		3,11	0,43				2,65	5,00*	9,87	
1	1,47	0.01			2,95	5,00*	7,93	13,38		
0	1,47	3,11	4,99	7,19	9,87	13,38				

N=15 N_1=7

x \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3			5,45							3,51	7,84
2		3,40						3,35	5,78		
1	1,61					3,86*	5,99				
0	1,32	2,78	4,42	6,31	8,51						

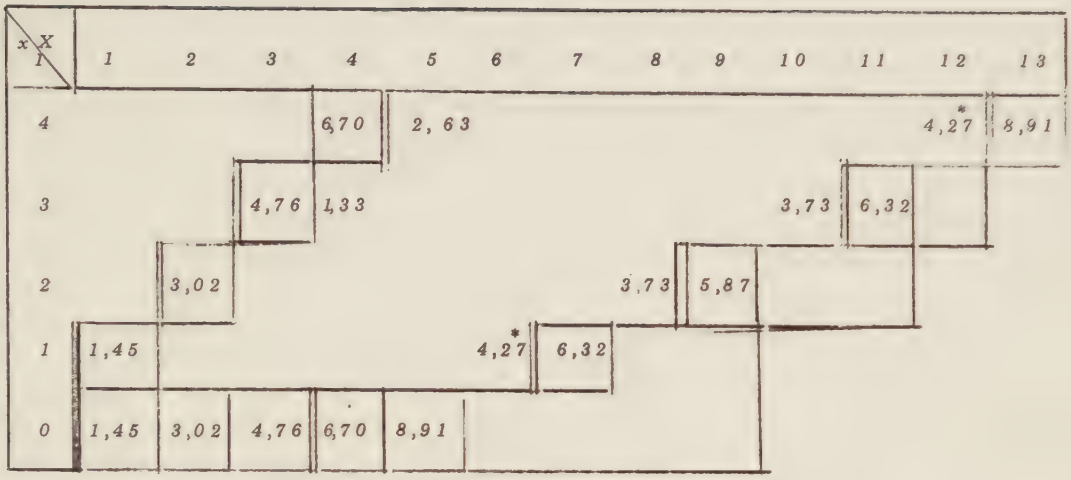
N=16 N_1=8

x_1 \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4				6,91	2,76						2,76	6,91
3			4,86	0,25					2,34	4,55*	9,29	
2		3,06	0,42			1,08	2,34	4,18*	6,90			
1	1,45	0,00	0,43	1,38	2,76	4,55*	6,90	10,12				
0	1,45	3,06	4,86	6,91	9, 29							

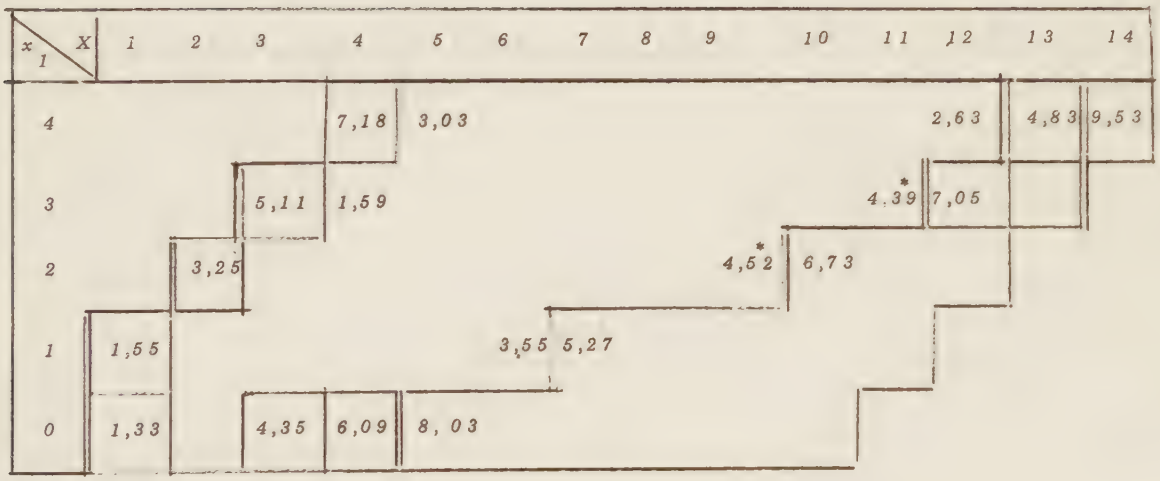
N=17 N_1= 8

x_1 \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4				7,46	3,23							3,23	7,46
3			5,25							2,90	5,20	10,01	
2		3,31						3,04	4,96				
1	1,57					3,67	5,54						
0	1,32	2,77	4,38	6,18	8,23								

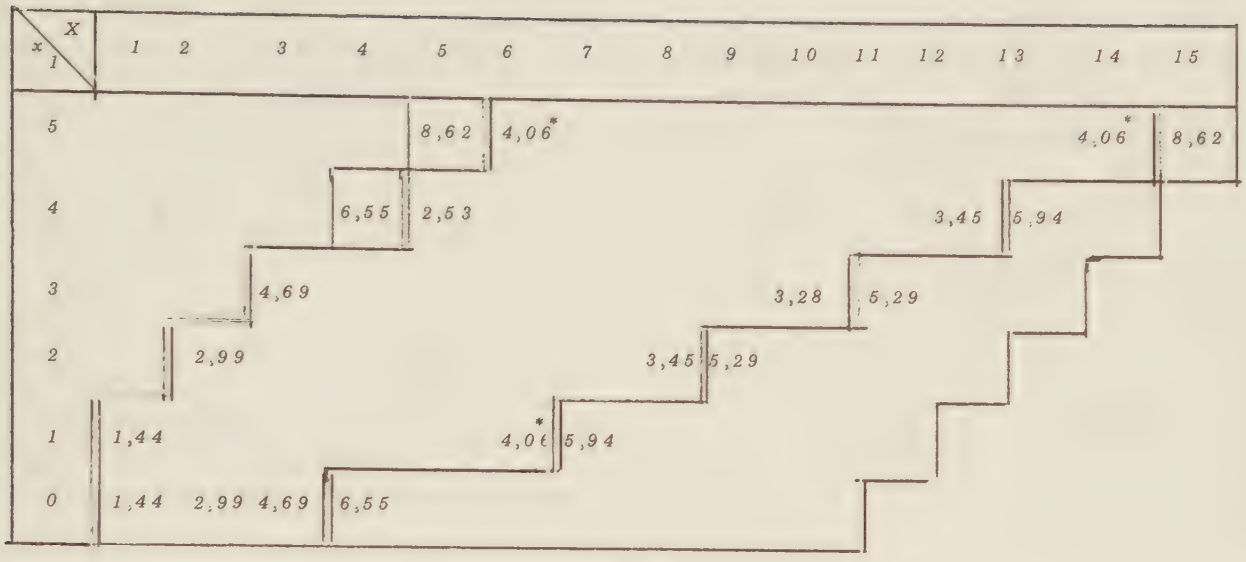
N= 18, N_1= 9



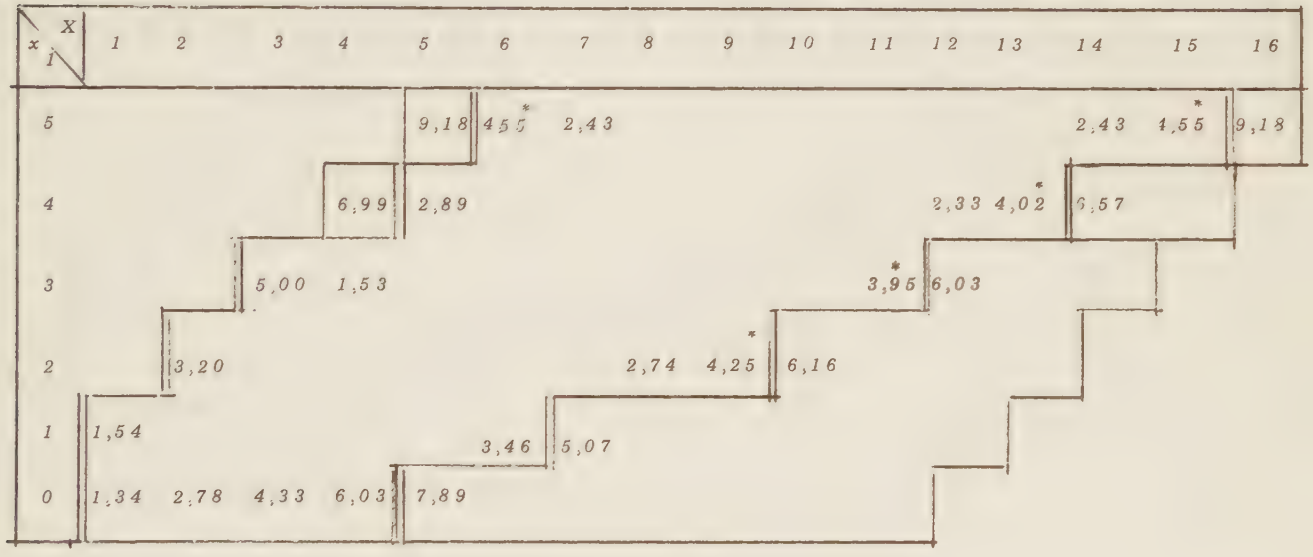
N=19, N_1 = 9



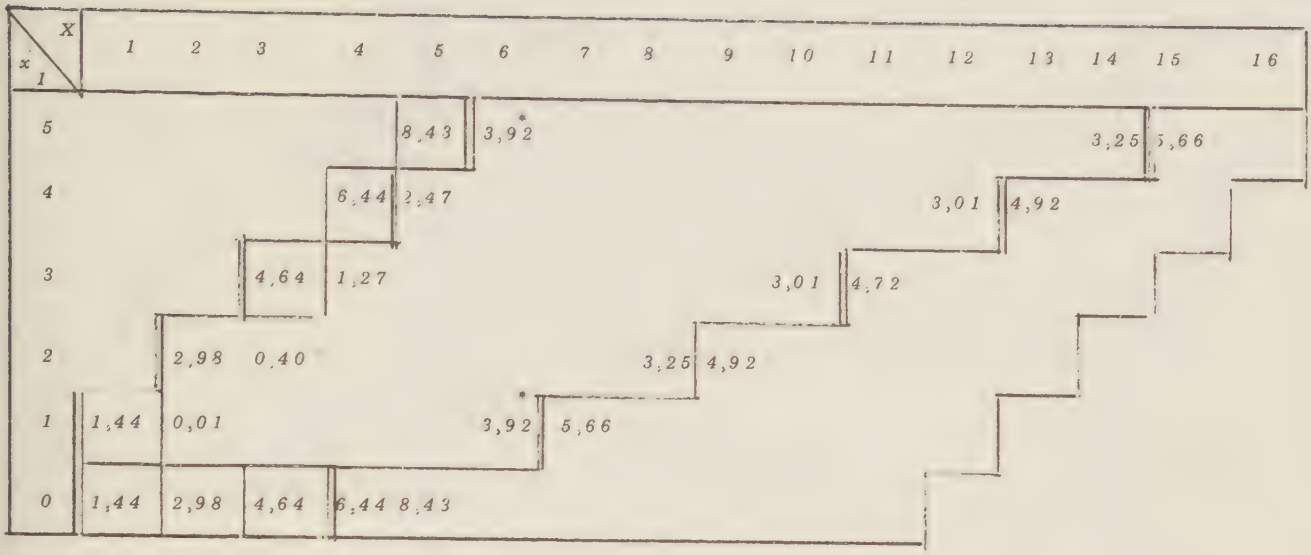
N=20 , N_1= 10



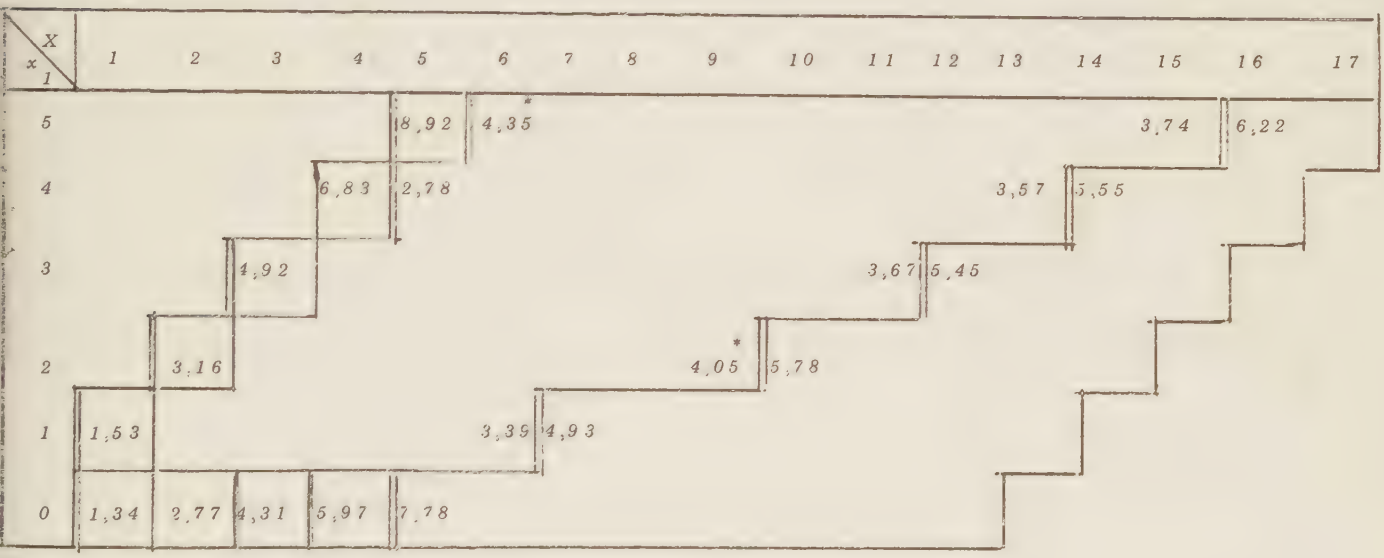
N=21 , N_1= 10



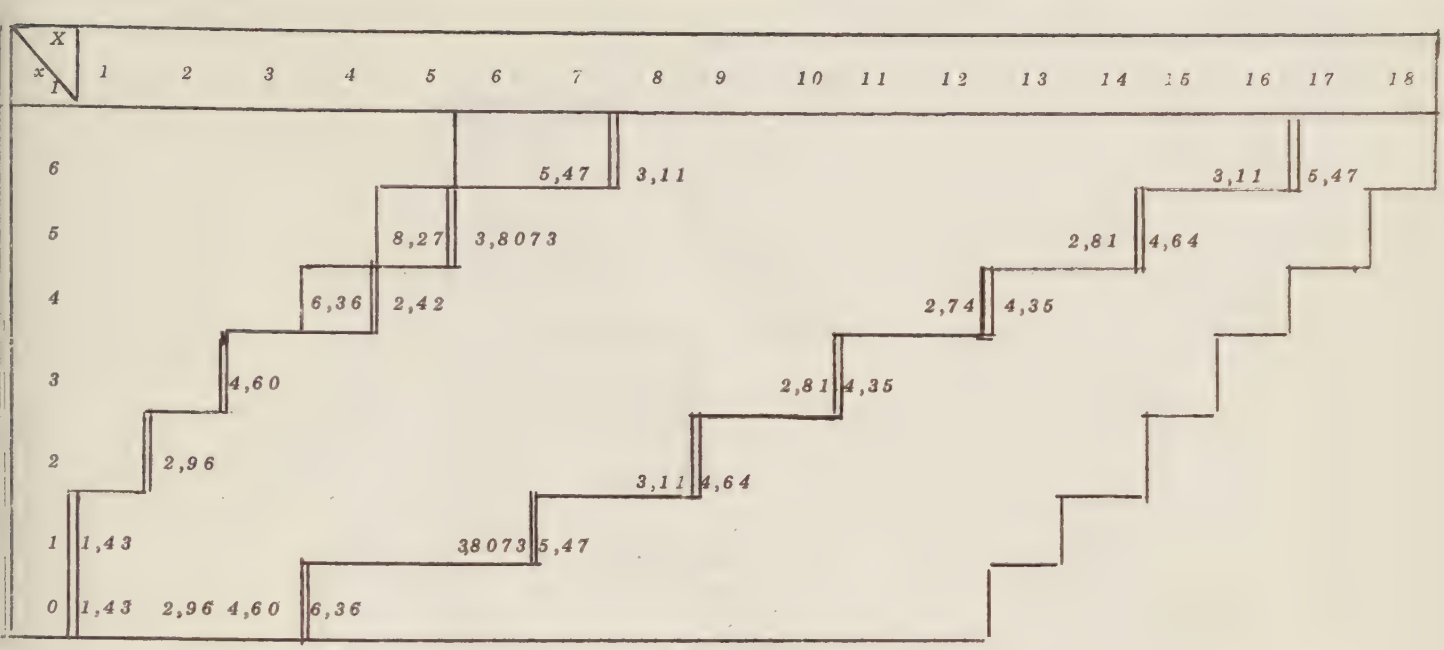
N = 22 , N_1 = 11



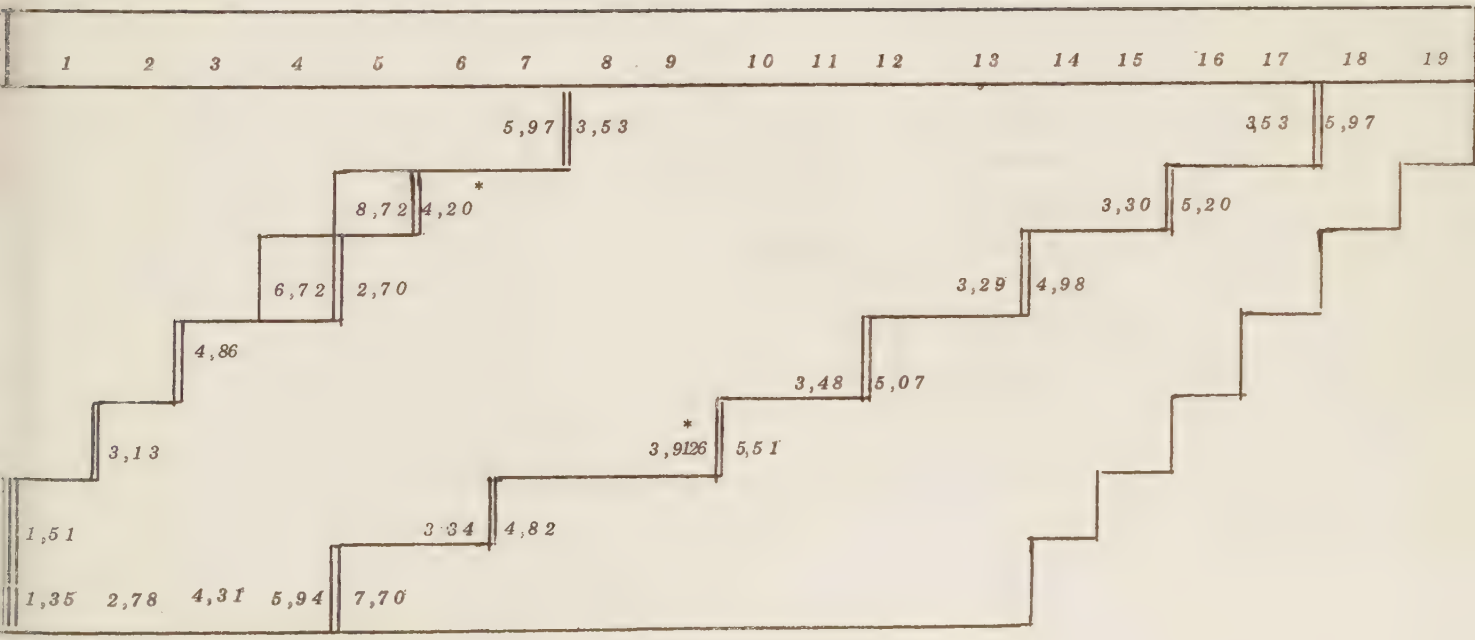
N = 23 , N_1 = 11



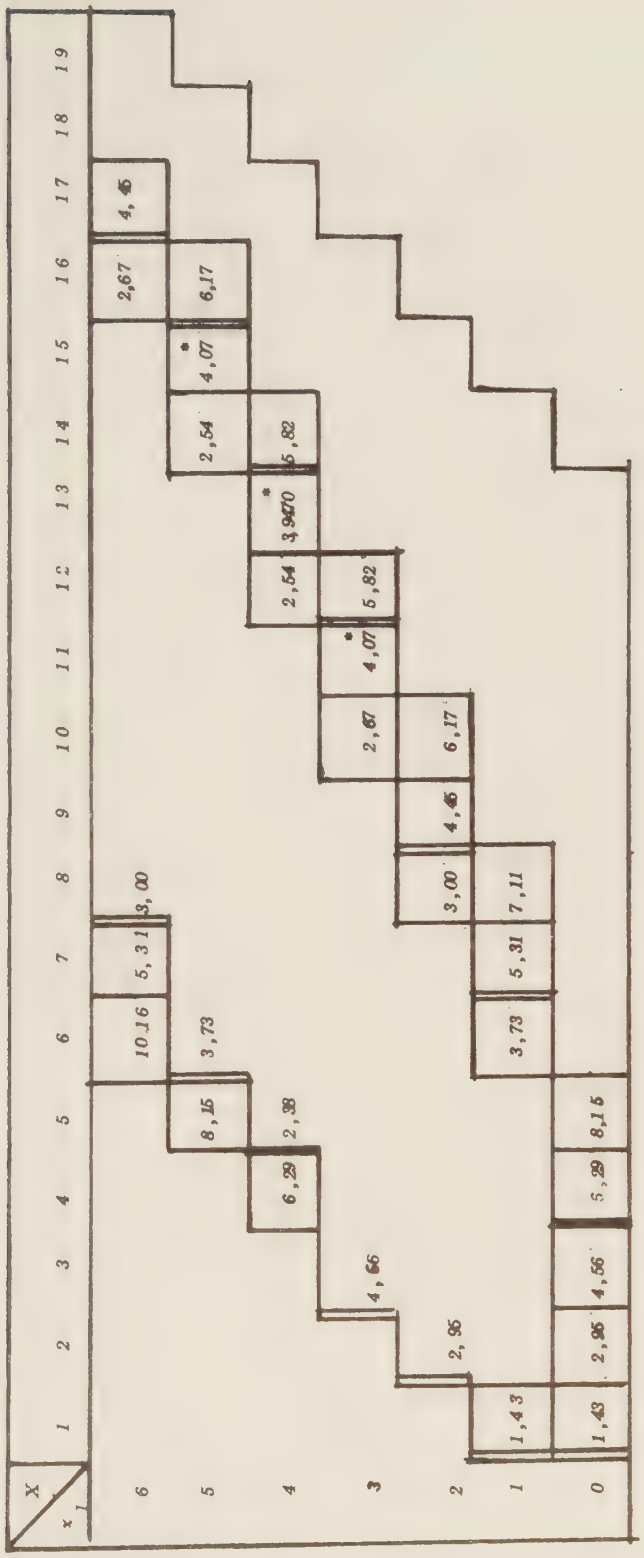
N = 24 , N_1 = 12



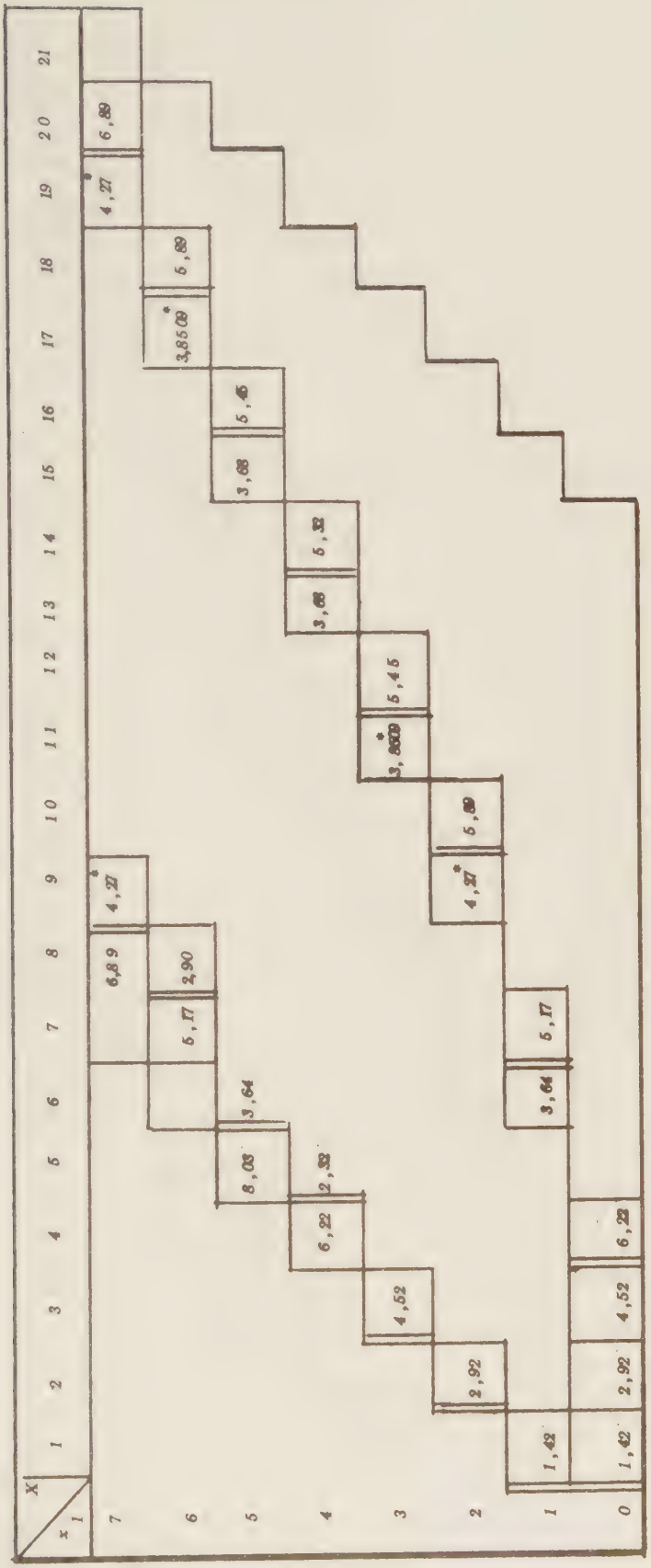
N = 25 , N_1 = 12



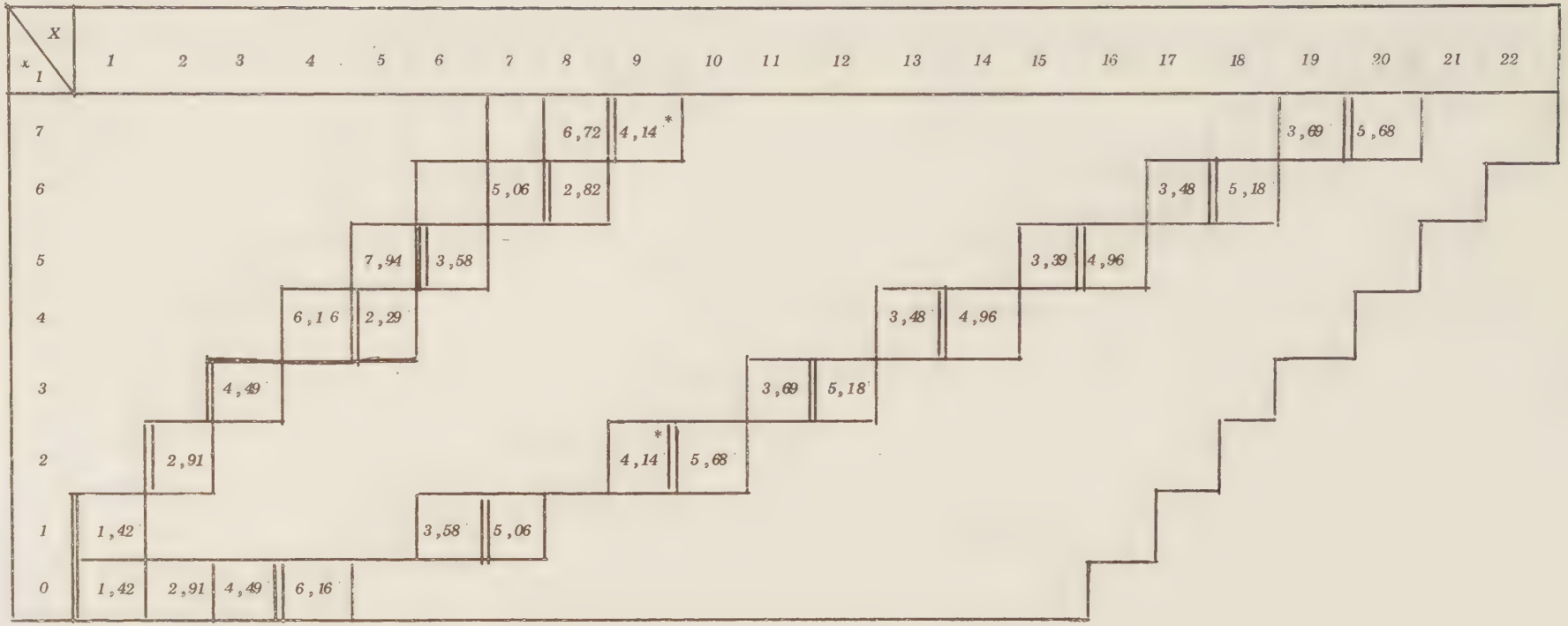
$N = 26$, $N_1 = 13$


X
x1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
6 5 4 3 2 1 0
1,43
2,95
4,56
6,29
8,15
10,16
5,31
3,00
4,45
2,67
6,17
4,07
2,54
5,82
3,92
2,54
5,82
4,07
2,67
6,17
4,45
3,00
7,11
5,31
3,73
8,15
6,29
2,38
3,73
4,66
2,95
1,43

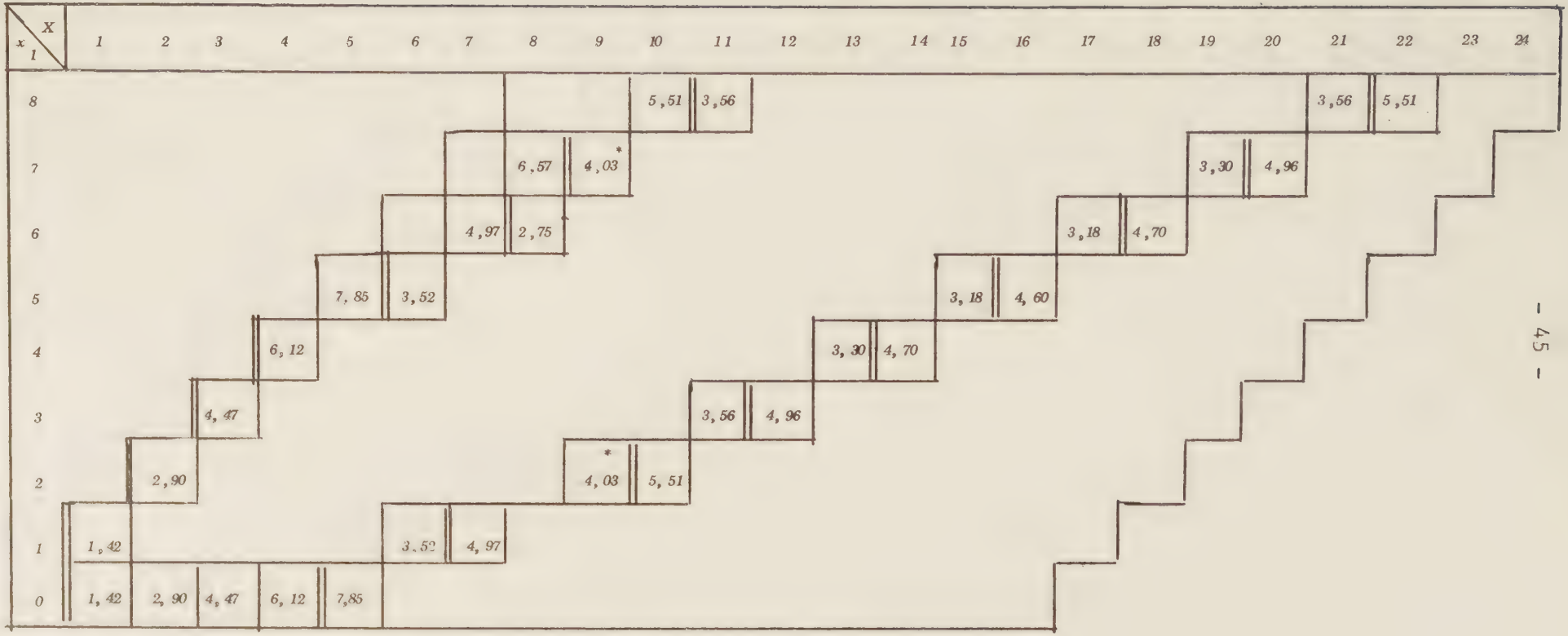
$N = 28$, $N_1 = 14$


X
x1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
7
6
5
4
3
2
1
0
1,42 1,42
2,92 2,92
4,52 4,52
6,22 6,22
8,03 2,32
3,64
6,17 6,17
6,89 2,90
4,27
3,64
6,17
4,27 6,89
3,8609 6,45
3,68 6,32
3,68 6,45
3,68 6,45
3,8609 6,89
4,27 6,89

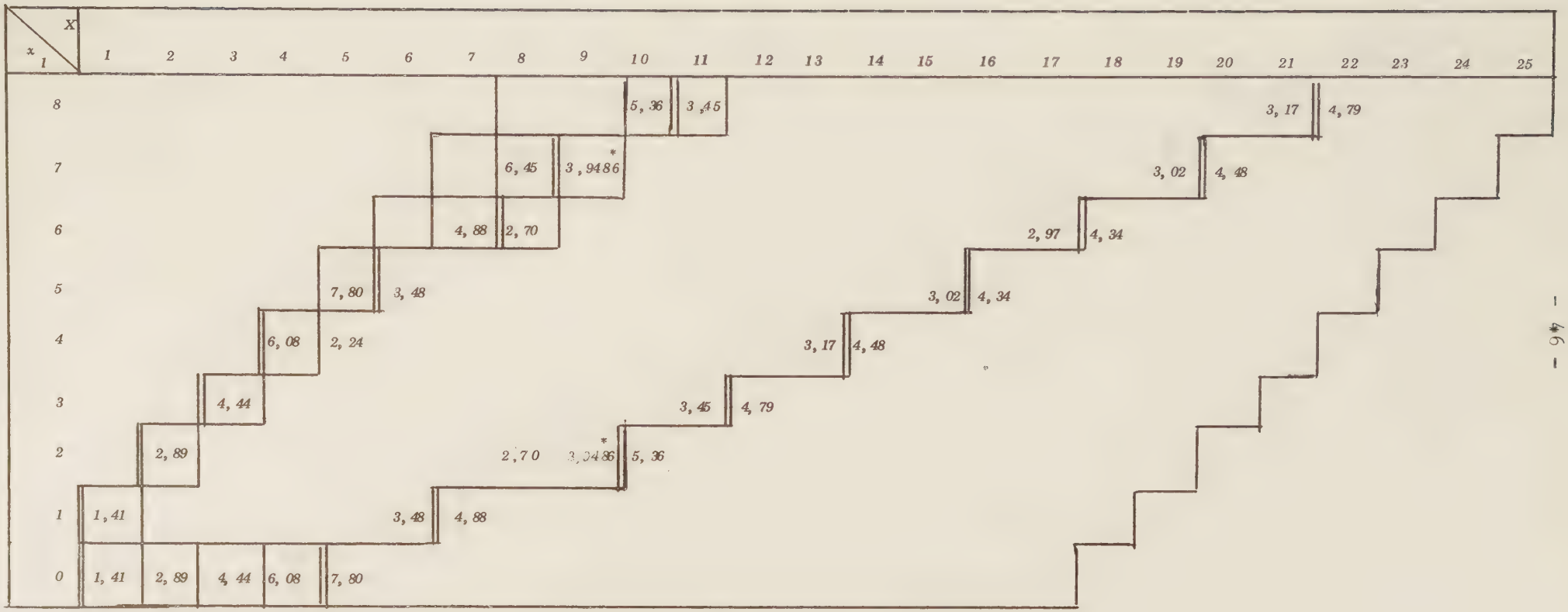
$N = 30 , N_1 = 15$


X
x
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
7
6
5
4
3
2
1
0
6,72 4,14 *
3,69 5,68
5,06 2,82
3,48 5,18
7,94 3,58
3,39 4,96
6,16 2,29
3,48 4,96
4,49
3,69 5,18
2,91
* 4,14 5,68
1,42
3,58 5,06
1,42 2,91 4,49 6,16

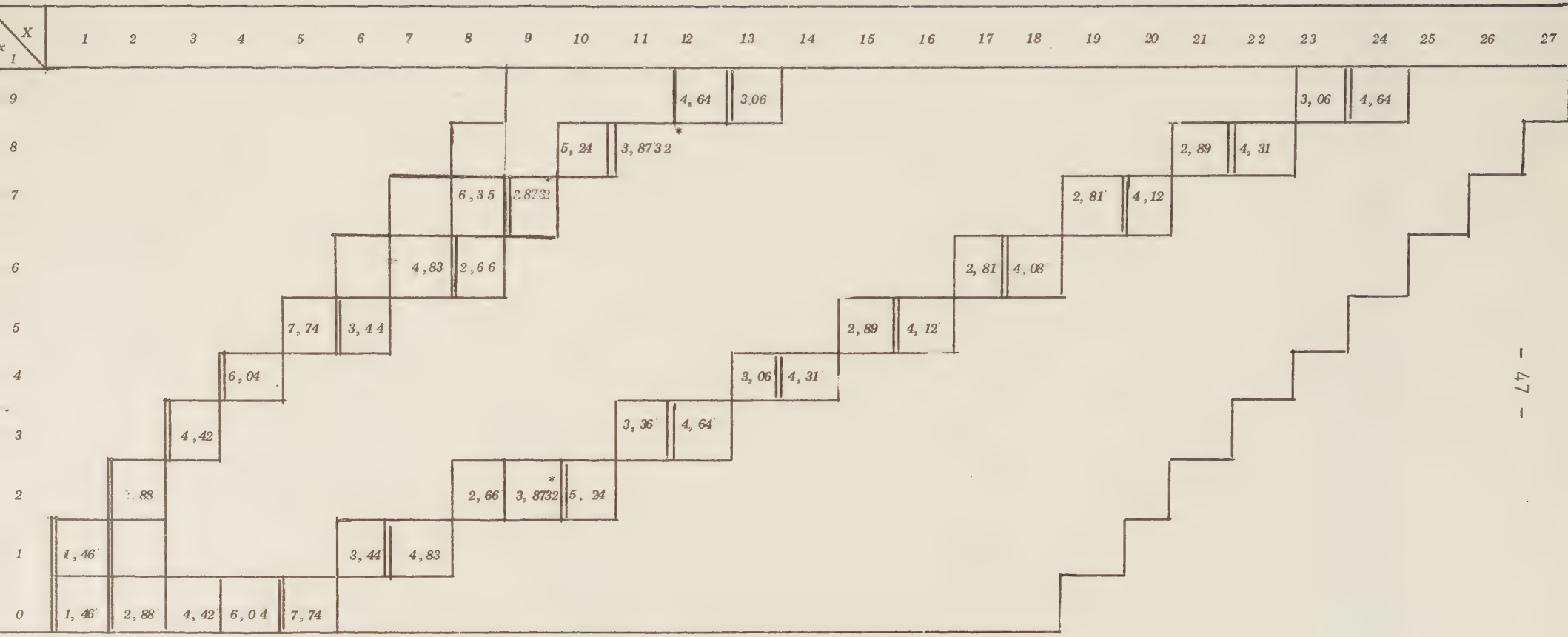
N = 32 N_1 = 16


x / X
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5,51
3,56
3,56
5,51
6,57
4,03*
3,30
4,96
4,97
2,75
3,18
4,70
7,85
3,52
3,18
4,60
6,12
3,30
4,70
4,47
3,56
4,96
2,90
4,03*
5,51
1,42
3,52
4,97
1,42
2,90
4,47
6,12
7,85

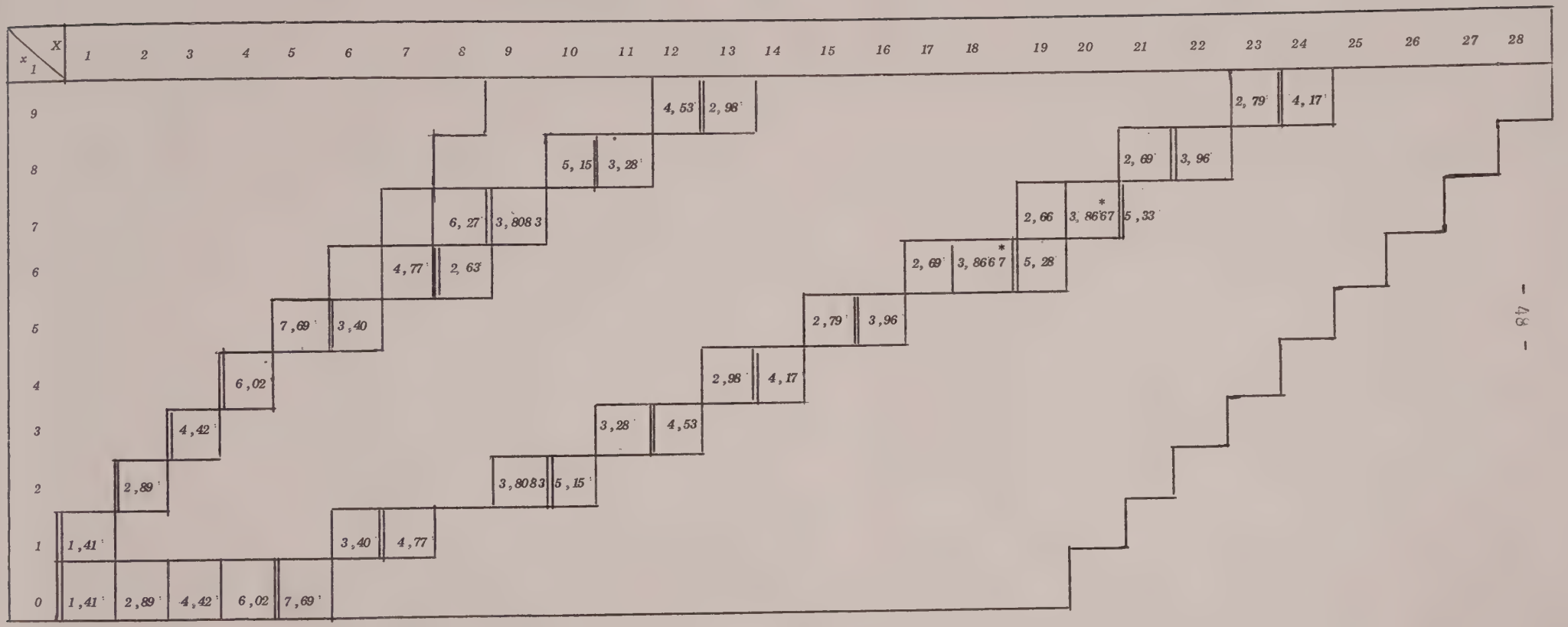
$N = 34 \ , \ N_1 = 17$


X
x 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5, 36
3 ,45
3, 17
4, 79
6, 45
3 , 9486 *
3, 02
4, 48
4, 88
2, 70
2, 97
4, 34
7, 80
3, 48
3, 02
4, 34
6, 08
2, 24
3, 17
4, 48
4, 44
3, 45
4, 79
2, 89
2, 70
3, 9486 *
5, 36
1, 41
3, 48
4, 88
1, 41
2, 89
4, 44
6, 08
7, 80

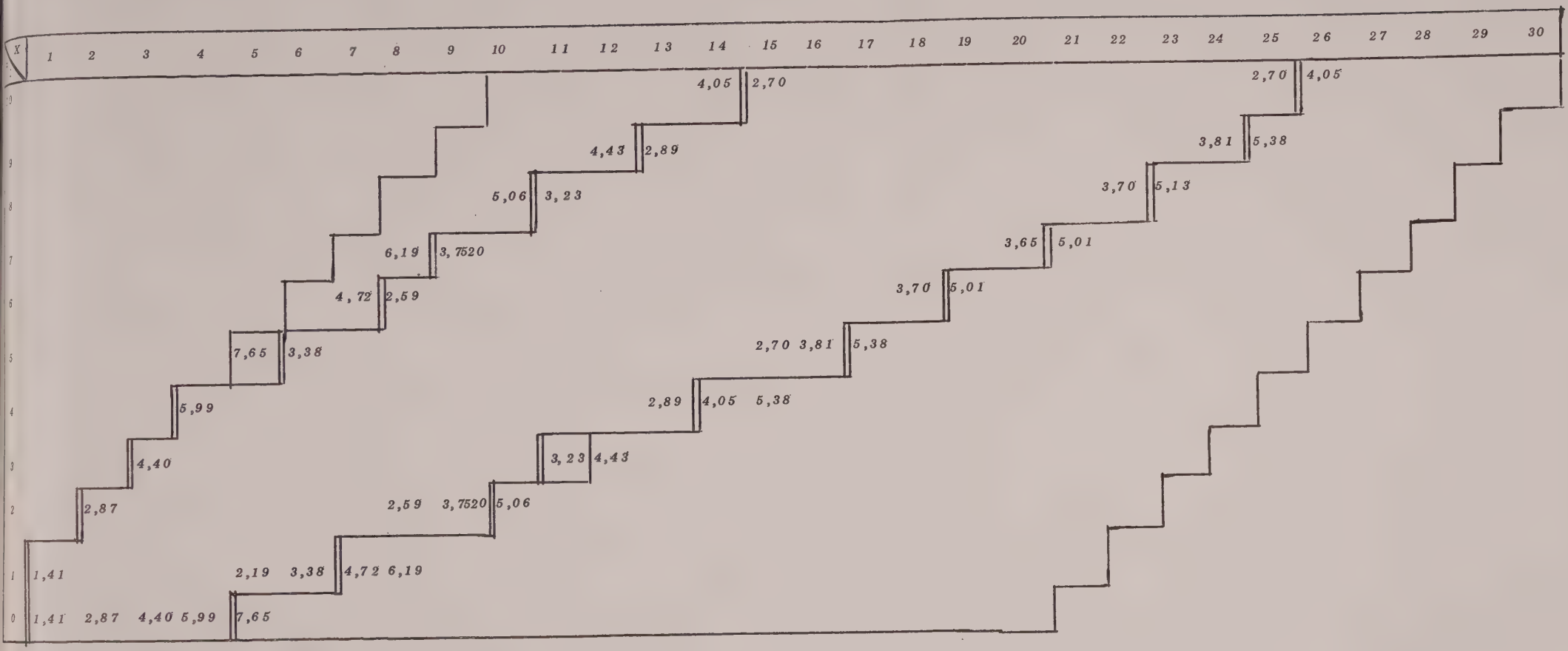
$N = 36 , N_1 = 18$

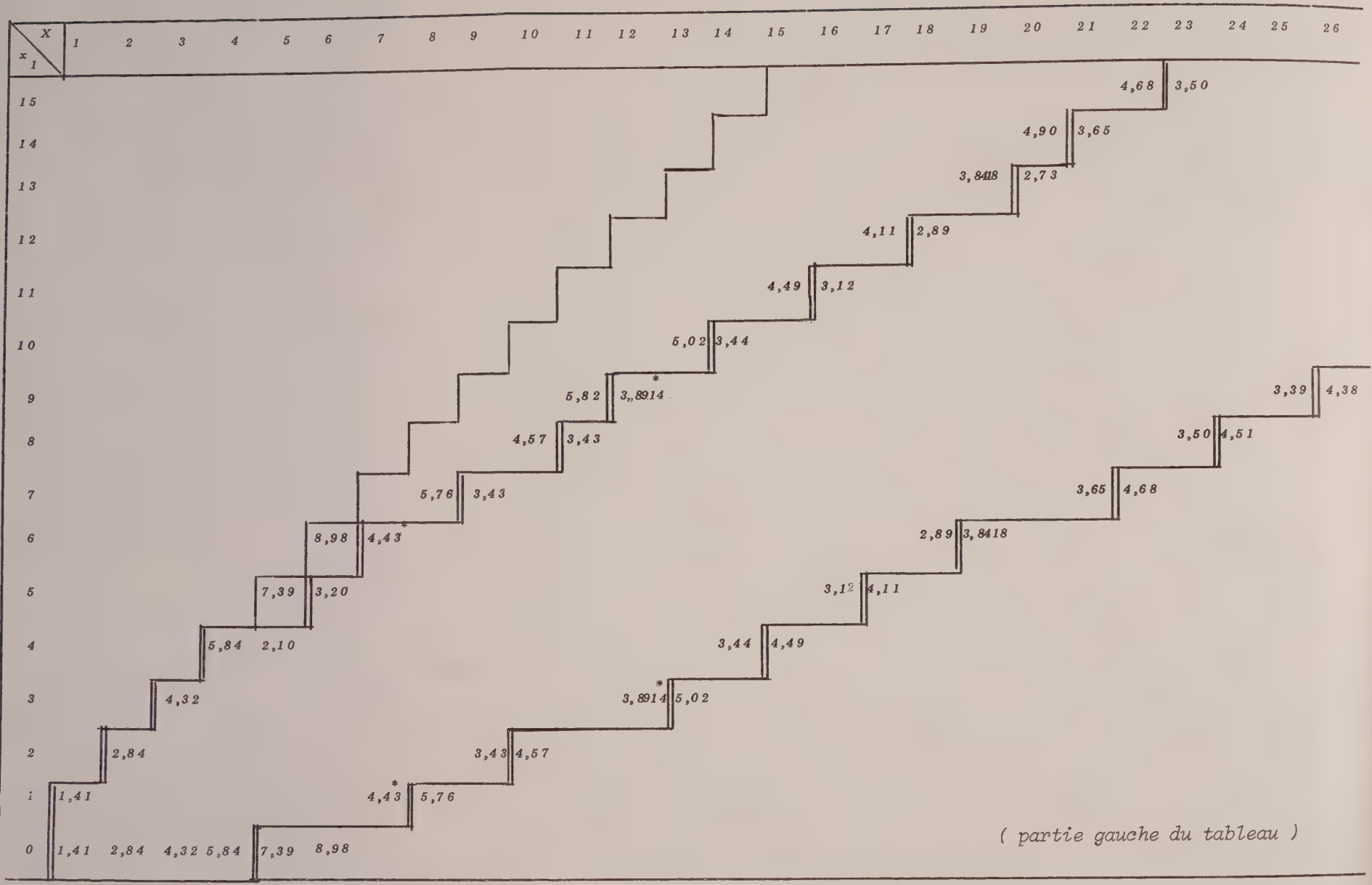

X
x 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
4, 64
3,06
3, 06
4, 64
5, 24
3, 8732
2, 89
4, 31
6, 35
3,8732
2, 81
4, 12
4, 83
2, 66
2, 81
4, 08
7, 74
3, 44
2, 89
4, 12
6, 04
3, 06
4, 31
4, 42
3, 36
4, 64
2, 88
2, 66
3, 8732
5, 24
1, 46
3, 44
4, 83
1, 46
2, 88
4, 42
6, 04
7, 74

$N = 38$, $N_1 = 19$

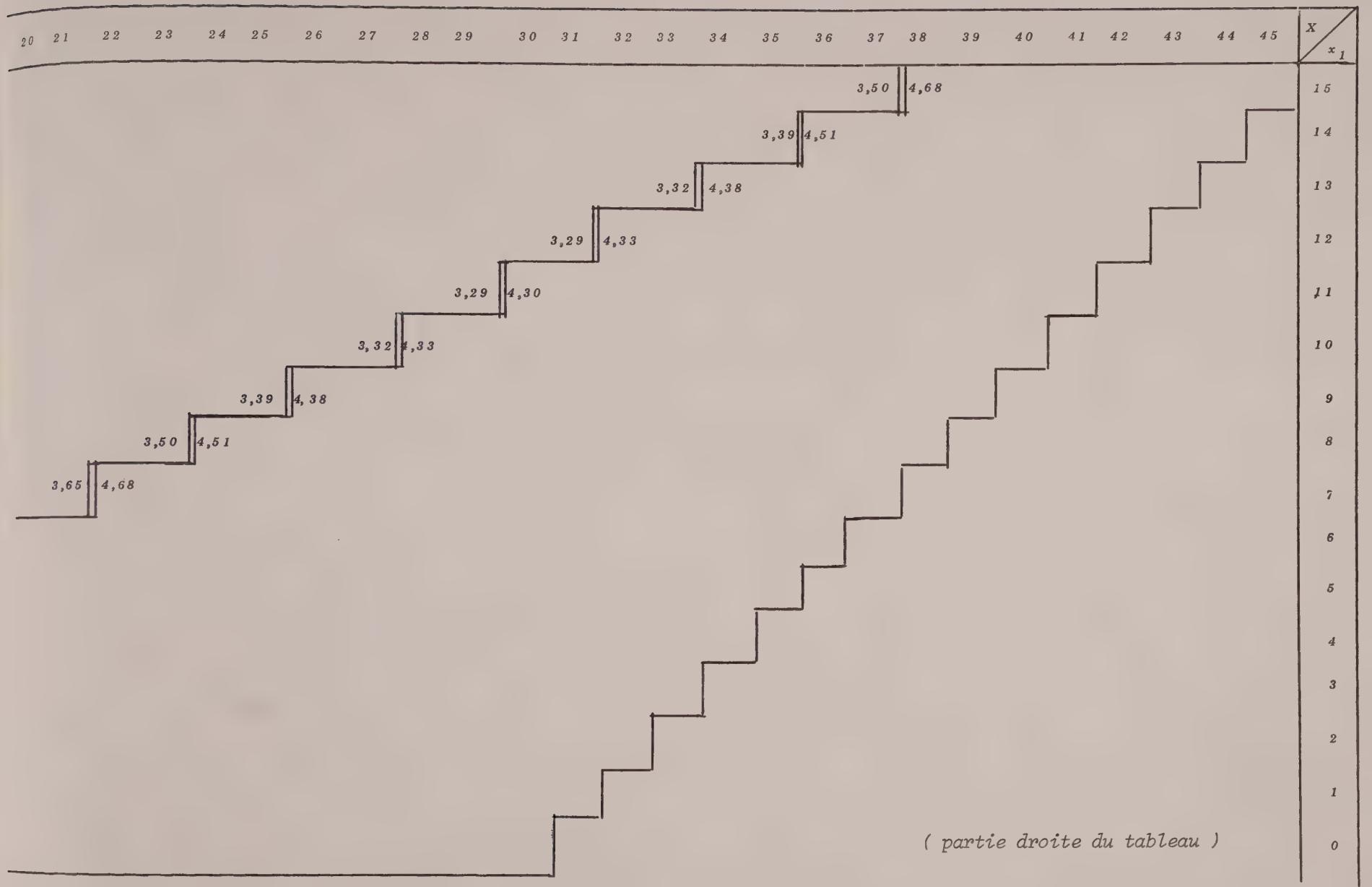

x \ X
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1,41
2,89
4,42
6,02
7,69
3,40
4,77
6,27
3,8083
2,63
5,15
3,28
4,53
2,98
4,17
2,79
3,96
2,69
3,8667 *
5,28
2,66
5,33
- 48 -

$N = 40 , N_1 = 20$


X
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1,41 2,87 4,40 5,99 7,65
1,41
2,87
4,40
5,99
7,65 3,38
2,19 3,38 4,72 6,19
4,72 2,59
6,19 3,7520
2,59 3,7520 5,06
5,06 3,23
4,43 2,89
4,05 2,70
2,89 4,05 5,38
3,23 4,43
2,70 3,81 5,38
3,70 5,01
3,65 5,01
3,70 5,13
3,81 5,38
2,70 4,05



(partie gauche du tableau)



(partie droite du tableau)

IV - INTERPRETATION DES TABLEAUX DE COMPARAISON POUR LE SEUIL 5%

La lecture de ces tableaux nous montre qu'il faut distinguer deux cas :

1/ Les distributions comportant une classe d'effectif nul.

Elles doivent être interprétées à part car la valeur de G est nettement trop élevée (rangées inférieures, bords droits et gauches des tableaux).

Nous proposons dans ce cas de lire G significatif à 5% pour la valeur de χ^2 significatif à 1%, soit 6,64.

2/ Toutes les autres distributions.

La réponse du test G au seuil 5% (soit 3,84 pour χ^2) est la même que celle du test de la table à quatre cases dans deux domaines :

- lorsque G est inférieur à 3,84 , il est toujours vrai que la distribution observée est non significative.
- lorsque G est supérieur à 5,41 (c'est à dire χ^2 au seuil de 2% la distribution est toujours significative à 5%.

Ceci est vrai *QUELLE QUE SOIT LA TAILLE DE L'ECHANTILLON.*

Pour les valeurs de G comprises entre 3,84 et 5,41, il y a doute, certaines distributions étant significatives à 5% d'autres non. En fait, seules quelques valeurs de G (que nous avons signalées dans les tableaux par le signe *) sont supérieures à 3,84 et comprises dans le domaine non significatif : la concordance entre les deux tests est dans l'ensemble excellente.

LA DIFFERENCE EST TOUJOURS DANS LE MEME SENS : les valeurs de G sont un peu trop élevées. Cette différence diminue lorsque la taille de l'échantillon augmente : elle devient infime dès que cette taille est comprise entre 30 et 40:

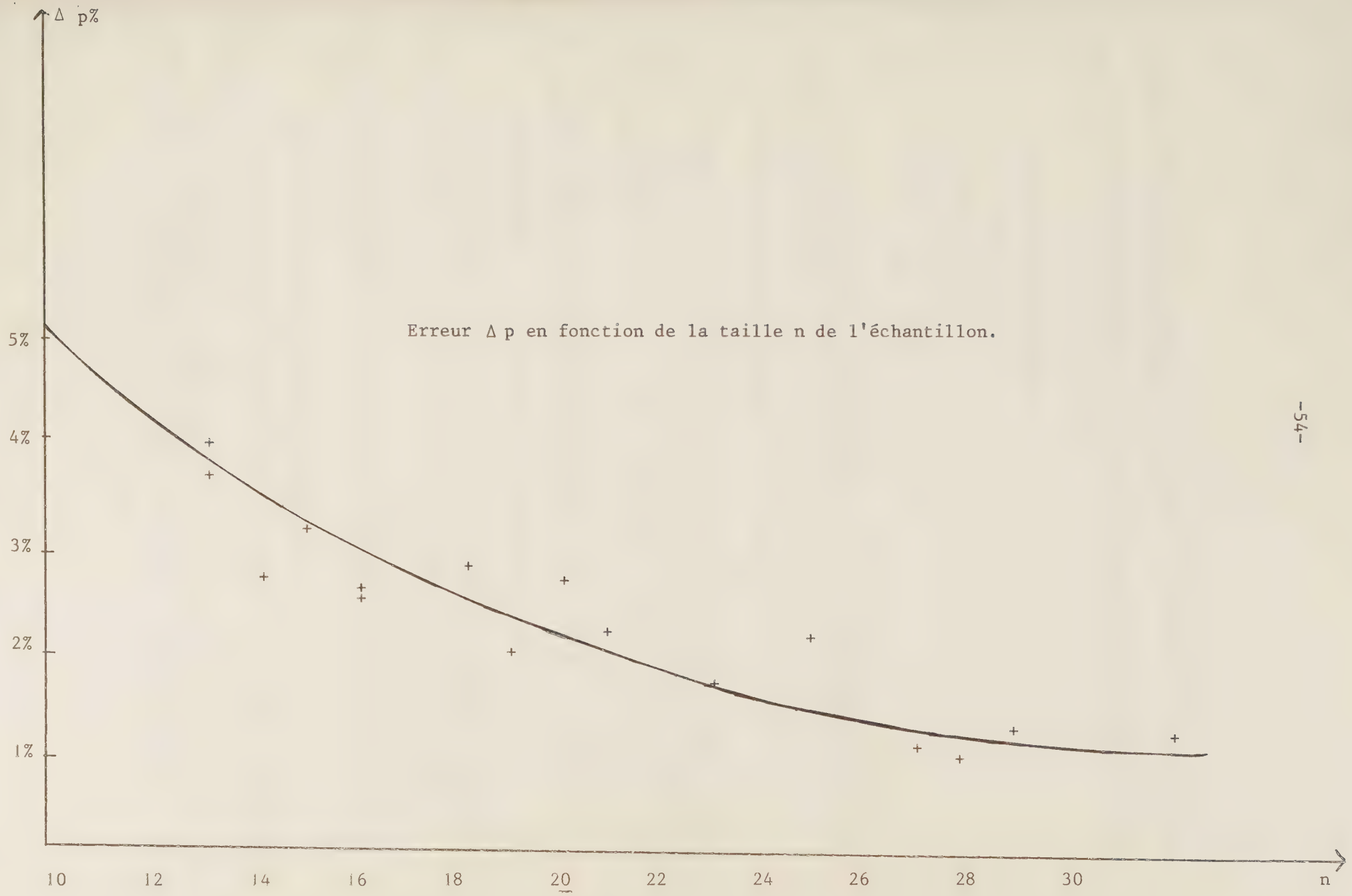
Pour les échantillons plus petits que 30, nous avons déterminé :

- la probabilité exacte par le méthode de FISHER,
- la probabilité correspondant à la valeur de G.

Les meilleures tables n'étant pas assez précises nous l'avons obtenue graphiquement avec une erreur inférieure à 0,001 en traçant la courbe représentative de la probabilité cumulée de χ^2 à 1 degré de liberté.

Pour les distributions non significatives à 5% à valeur de G supérieure à 3,84, nous avons obtenu les résultats suivants :

Distribution				Valeur de G	Probabilité d'après G (pour mille)	Probabilité exacte (pour mille)	Erreur Δ p (pour mille)
N	N_1	X	x_1				
10	5	5	1	3,87	49	103	54
11	5	6	1	4,75	29	67	38
13	6	8	2	3,94	47	86	39
13	6	6	1	4,15	42	77	35
14	7	6	1	5,00	25	51	26
15	7	6	1	3,86	50	83	33
16	8	8	2	4,18	41	66	25
16	8	6	1	4,55	33	59	26
18	9	6	1	4,27	39	66	27
19	9	11	3	4,39	36	55	19
19	9	9	2	4,52	33	51	18
20	10	6	1	4,06	44	70	26
21	10	11	3	3,95	47	63	16
21	10	13	4	4,02	46	63	18
21	10	9	2	4,25	39	56	17
21	10	6	5	4,55	33	55	22
22	11	6	5	3,92	47	74	27
23	11	9	2	4,05	44	60	16
23	11	6	5	4,35	37	59	22
25	12	9	2	4,20	40	63	23
26	13	13	4	3,91	48	63	15
26	13	11	3	4,07	44	55	11
28	14	11	3	3,85	50	60	10
28	14	9	2	4,27	39	51	12
30	15	9	2	4,14	42	54	12
32	16	9	2	4,03	45	56	11



Erreur Δ p en fonction de la taille n de l'échantillon.

Ces résultats nous montrent que l'erreur Δp décroît de 5% à 1% lorsque la taille de l'échantillon croît de 10 à 30.

Nous proposons d'effectuer une correction systématique en ajoutant à la probabilité déterminée d'après la valeur de G :

5% pour un effectif de 10.
4% entre 10 et 15.
3% de 15 à 19.
2% de 20 à 25.
1% à partir de 26.

Cette correction n'est pas rigoureuse : nous la proposons parce qu'il est facile de se souvenir des corrections 5%, 4% , 3%, 2%, 1% associées aux valeurs 10, 15, 20, 25.

La probabilité après correction, est déterminée à $\pm$ 1% .

L'inexactitude de ce procédé nous paraît négligeable en regard de sa commodité d'emploi : le seuil 5% est arbitraire, cette valeur ne s'est imposée à l'usage que parce que notre système de numération est décimal ; une incertitude de 1% entraîne un seuil à 6% qui a exactement la même valeur que le seuil traditionnel à 5%.

Pour résumer cette étude pratique de la validité du test G au seuil de 5% nous retiendrons les propositions suivantes :

- *EN FONCTION DE L'EFFECTIF DE LA PLUS PETITE CLASSE :*

La règle,en usage pour le test χ^2 de Pearson qui veut qu'on se limite à des classes d'effectif *théorique* au moins égal à 5 , n'apparait pas une seule fois justifiée - pour le test G - dans les tableaux que nous publions.

Le seul cas douteux est celui ou existe au moins une classe d'effectif *observé* nul. Aucune difficulté dès que les effectifs *observés* sont au moins égaux à 1.

- *EN FONCTION DE LA TAILLE DE L'ECHANTILLON :*

Pour des échantillons supérieurs à 30, le test G est immédiatement utilisable.

Pour des échantillons inférieurs à 30 , il faut effectuer une correction lorsque G est significatif entre 2% et 5%. Cette correction est inutile à l'extérieur de ces valeurs (si on se contente d'une réponse au seuil 5%.)

CONCLUSION

Nous donnerons à notre thèse une double conclusion :

- *SUR LE PLAN THEORIQUE* , les résultats favorables que nous avons obtenus, justifient que soit entreprise une étude plus approfondie :

. étude des degrés de liberté supérieurs à un.

. comparaison avec les résultats du test de PEARSON : notamment à propos de la division des échantillons en classes, du regroupement nécessaire ou non des classes de faible effectif.

. recherches sur la distribution de probabilité de G.

- *POUR L'UTILISATION PRATIQUE* du test, nous proposons l'emploi de G tel que nous l'avons présenté, même pour les degrés de liberté supérieurs à un, la continuité des résultats acquis dans ce travail nous autorise à supposer qu'il en est de même dans le domaine que nous n'avons pas étudié. Mais surtout nous croyons que cette confiance ne peut entraîner - au pire - qu'une erreur bien négligeable devant la vraie difficulté qui n'est pas mathématique, mais médicale : l'échantillon est-il vraiement représentatif de la population à propos de laquelle est posé le problème étudié ?

BIBLIOGRAPHIE

1- BLISS C.J., Statistics in Biology.
Vol. I, Mc Graw-Hill Edit. New-York 1967.

3- BOWKER A.H et LIEBERMAN G.J. , Méthodes statistiques de l'ingénieur.
Dunod Edit. Paris 1965.

3- COCHRAN W.G., The χ^2 distribution for the binomial and Poisson séries, with small expectations.
Annals of Eugenics, 1936, 7, p. 287-217.

4- COCHRAN W.G., The χ^2 test of goodness of fit.
Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23, p. 315-345.

5- DUHAMEL J. et ROQUES J.C.. Deux techniques de statistique simples, comportant un minimum de calculs utilisables en biologie et en médecine.
Biologie médicale, 1971, 2, 177-203.

6- FISHER R.A., On the mathematical foundations of theoretical statistics.
Philosophial transactions, 1922, A. 222 309-68.

7- FISHER R.A., The conditions under wich χ^2 measures the discrepany between observation and hypotheis.
Journal of the Royal Statistical Society, 1924, 87,422-449.

8- FISHER R.A., The signifiance of deviations from expectations in a Poisson series.
Biometrics, 1950, 6, 17-24.

9- GRIZZLE J.E. 19, Continuity correction im the χ^2 test for 2 x 2 tables.
Amer Statist., 1967, T 21, 4, p. 28-32.

10-HALD A., Statistical theory with engineering applications.
John Wiley Edit. , New-York. 1967.

11-HELLER R., Manuel de Statistique Biologique.
Gauthier Villars Edit., Paris 1968.

12- KULLBACK S. KUPPERMAN M., et KU H.H. ., An application of information theory to the analysis of contingency tables with a table of 2 n. Log n, n = 1 to 10.000.
Journal of research of the national bureau of standards, mathematics and mathematical physics, 1962, 66 B, 4 247-243.

13- LEDERMAN S., Notions pratiques de statistique à l'usage du corps médical.
Suppl. du " Concours Médical " 1956, 25.

14- LISON L. , Statistique appliquée à la biologie expérimentale. La planification de l'expérience et l'analyse des résultats.
Gauthier Villars Edit., Paris, 1967.

15- NEYMAN J.,etPEARSON E.S., On the use andinterpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference.
Biometrika, 1928, 20 A, 175-240, 263-94.

16- PLACKETT R.L., The continuity correction in the 2 x 2 tables.
Biometrika 1964, 51, 327-337.

17-QUENOUILLE M.M. Rapid Statistical calculations.
C. Griffon Edit., Londres , 1959.

18-RAHMAN N.A. A course in theoritical statistics. C.Griffin Edit., Londres, 1968.

19- SMITH C.A.B., Biomathematics ,
Griffin Edit. Londres, 4ème édition, vol II, 1969.

20- VESSEREAU A. , Sur les conditions d'application du criterium χ^2 de PEARSON.
Revue de Statistique appliquée, 1958, 6, n° 2, 83-96.

21- WOOLF B. The log-like lihood ratio-test (the G. test).
Annals of human genetics, 1957, 21, 397-409.

TABLES STATISTIQUES

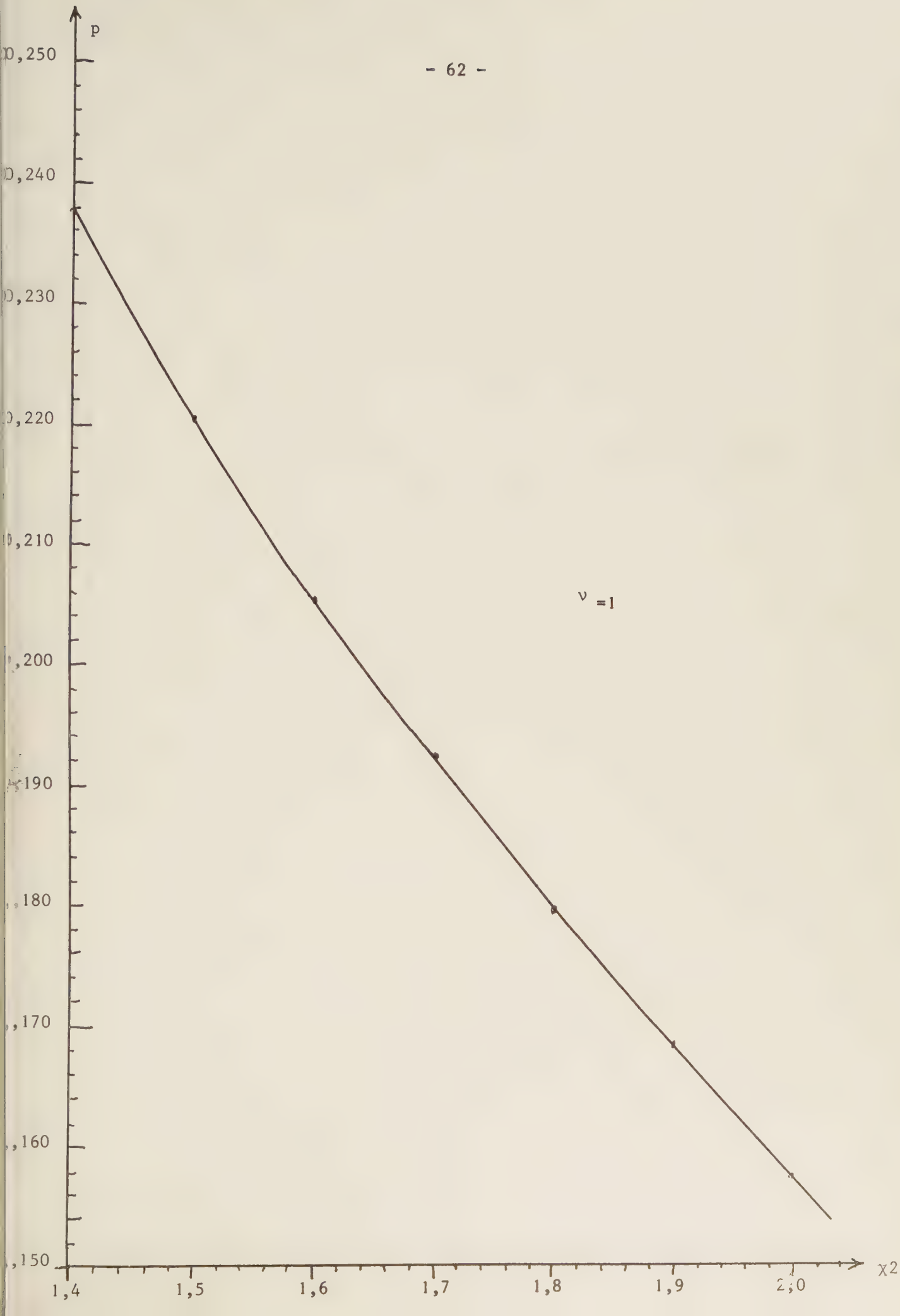
Table de χ^2

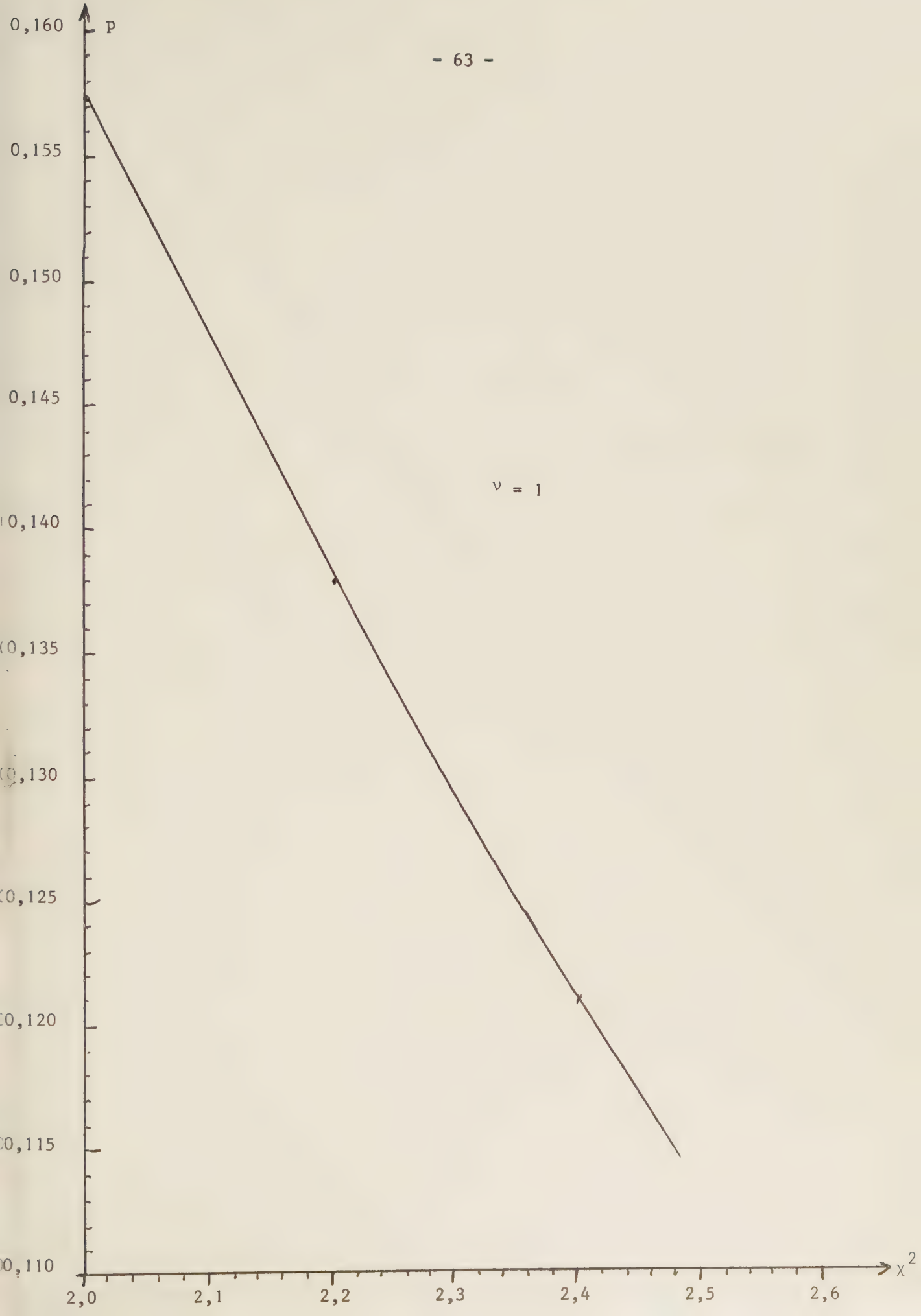
La table donne la probabilité α pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée en fonction du nombre de degrés de liberté ν.

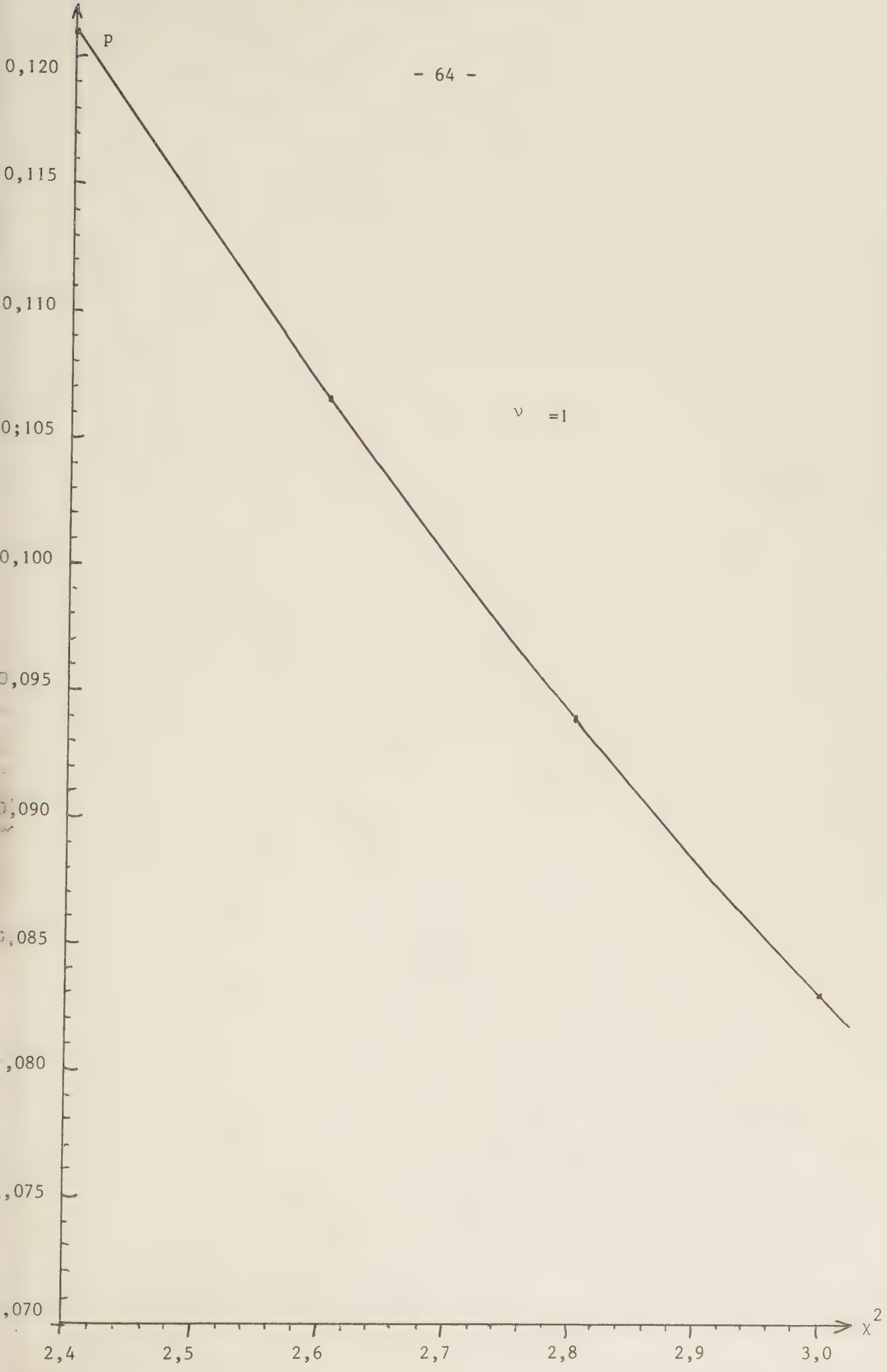
ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0158	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,211	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,584	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	1,064	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	1,610	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	2,204	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	2,833	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	3,490	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	4,168	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	4,865	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	5,578	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	6,304	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	7,042	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	7,790	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	8,547	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	9,312	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	10,085	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	10,865	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	11,651	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	12,443	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	13,240	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	14,041	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	14,848	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	15,659	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	16,473	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	17,292	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	18,114	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	18,939	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	19,768	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	20,599	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

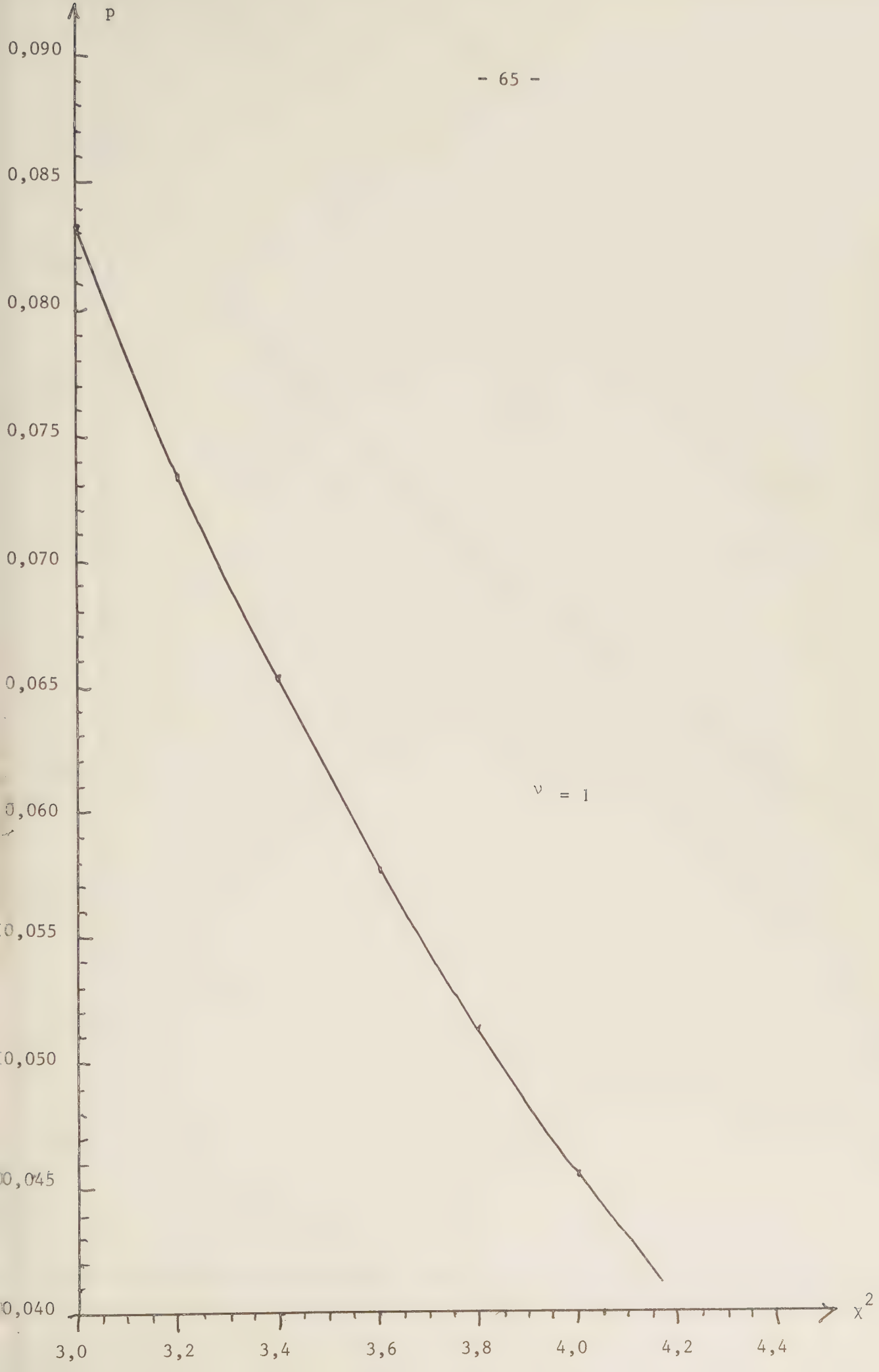
COURBES REPRESENTATIVES DE LA PROBABILITE P QUE χ^2 SOIT SUPERIEUR OU EGAL A UNE VALEUR DONNEE (POUR LE DEGRE DE LIBERTE $\nu = 1$)

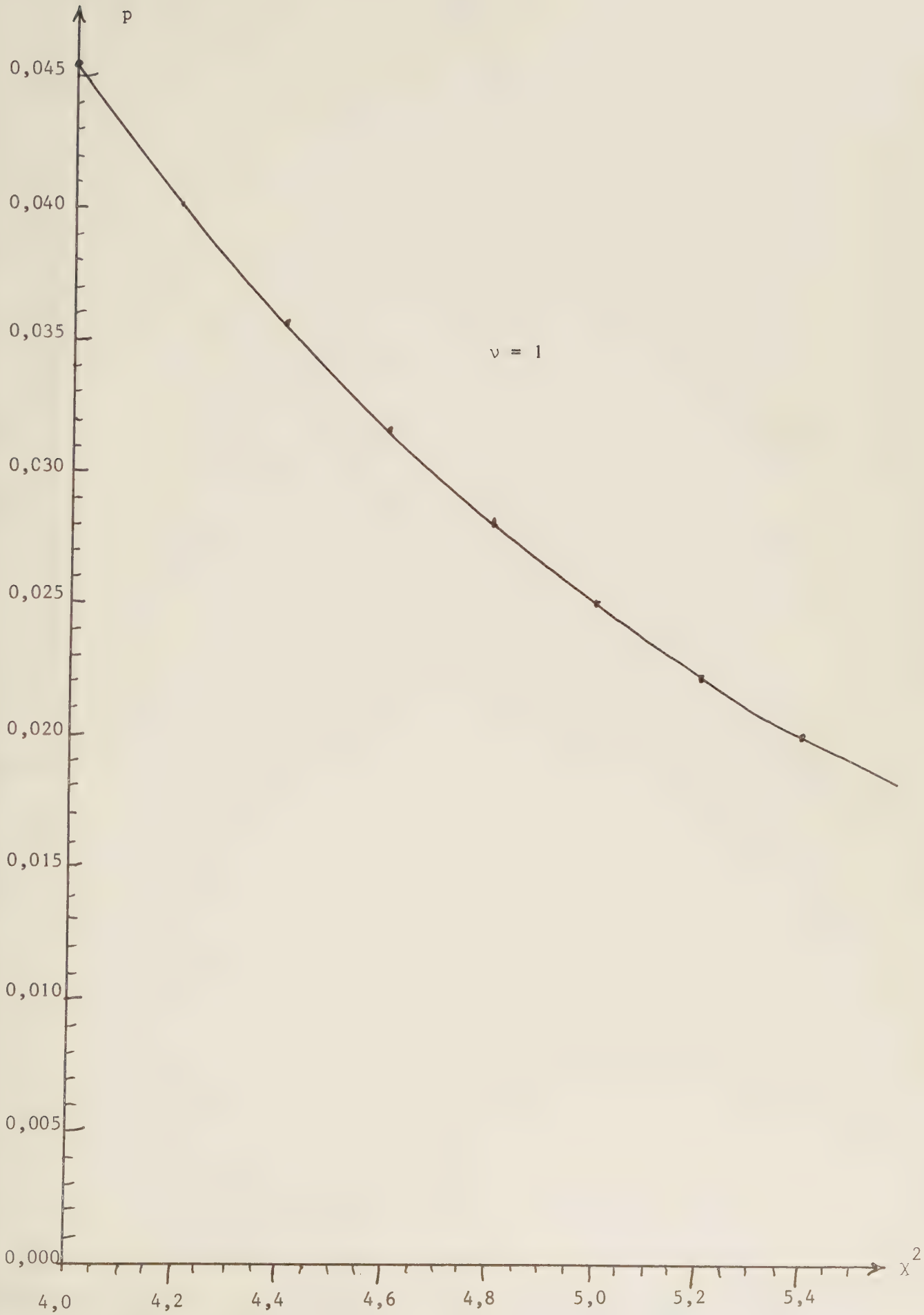
CES COURBES PERMETTENT UNE DETERMINATION GRAPHIQUE DE P AVEC UNE PRECISION SUPERIEURE A CELLE DES TABLES ACTUELLEMENT PUBLIEES.

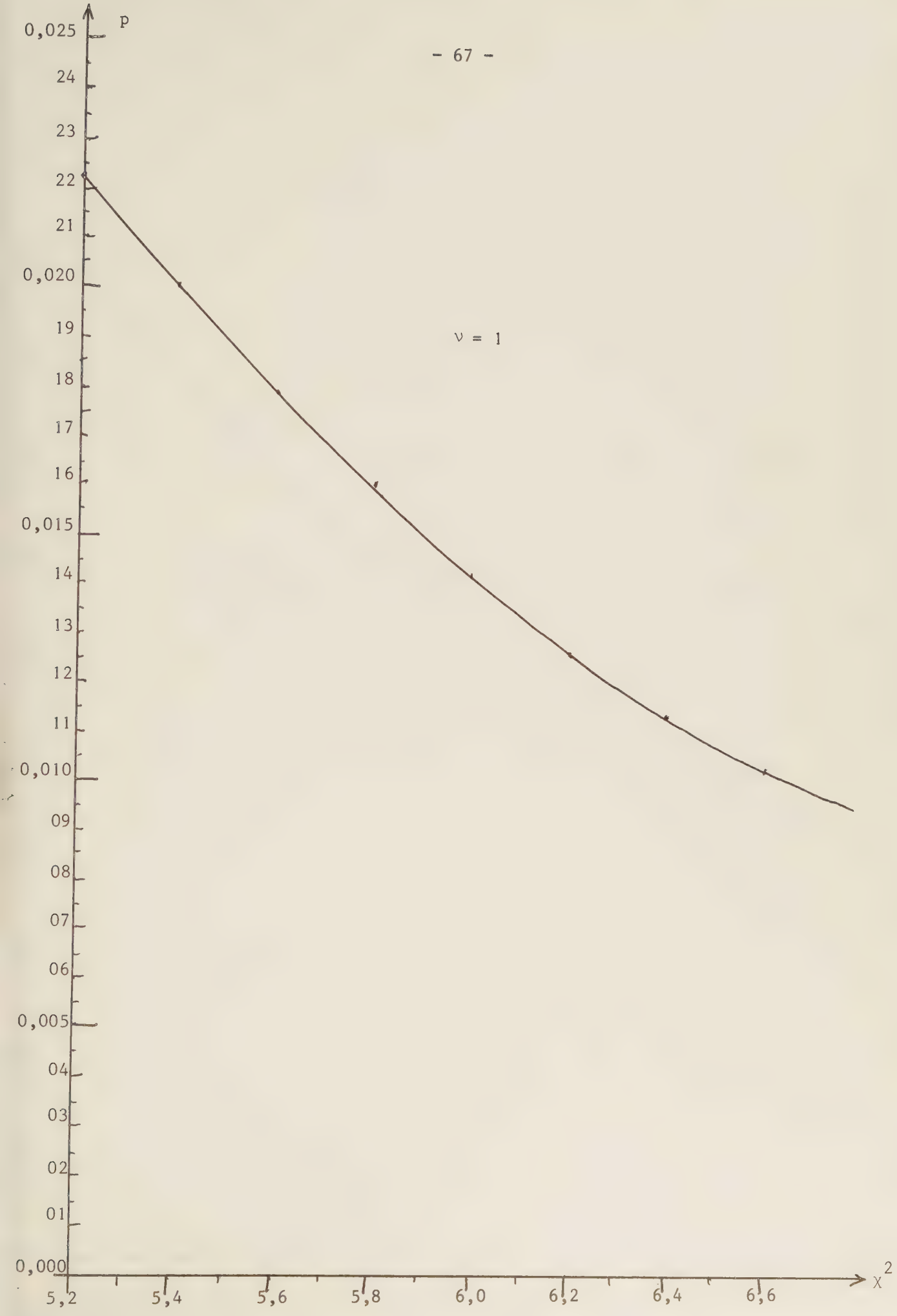

p
0,250
0,240
0,230
0,220
0,210
0,200
0,190
0,180
0,170
0,160
0,150
ν =1
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
χ2

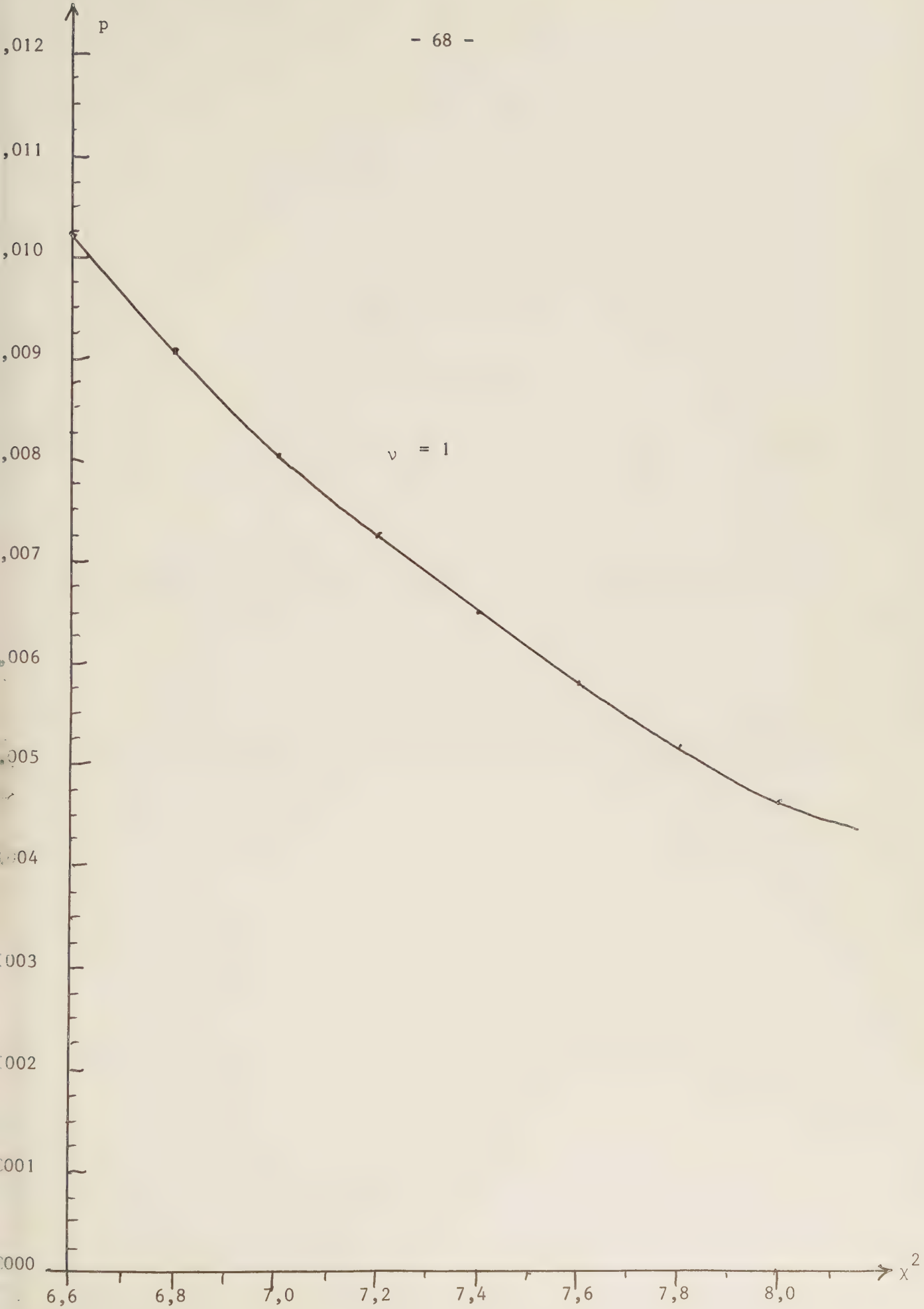

0,160
p
0,155
0,150
0,145
ν = 1
0,140
0,135
0,130
0,125
0,120
0,115
0,110
χ²
2,0
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,6


p
0,120
0,115
0,110
0;105
0,100
,095
,090
,085
,080
,075
,070
ν =1
χ²
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3,0


p
0,090
0,085
0,080
0,075
0,070
0,065
0,060
0,055
0,050
0,045
0,040
ν = 1
χ^2
3,0
3,2
3,4
3,6
3,8
4,0
4,2
4,4


p
0,045
0,040
0,035
0,030
0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
0,000
ν = 1
4,0
4,2
4,4
4,6
4,8
5,0
5,2
5,4
χ²


p
0,025
24
23
22
21
0,020
19
18
17
16
0,015
14
13
12
11
0,010
09
08
07
06
0,005
04
03
02
01
0,000
5,2
5,4
5,6
5,8
6,0
6,2
6,4
6,6
χ^2
$\nu = 1$


p
,012
,011
,010
,009
,008
,007
,006
,005
004
003
002
001
000
ν = 1
6,6
6,8
7,0
7,2
7,4
7,6
7,8
8,0
χ²

TABLES DE WOOLF

Ces tables donnent à l'intersection d'une ligne et d'une colonne la valeur du nombre g (x) tel que :

$$g(x) = 2.\ x \log x$$

x étant le nombre lu dans le tableau de contingence; il doit être décomposé en dizaines (verticalement) et unités (horizontalement).

1/ *TABLES DE WOOLF, POUR LE CALCUL DE G SANS CORRECTION DE CONTINUITE.*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0,0000	2,7726	6,5917	11,0904	16,0944	21,5011	27,2427	33,2711	39,5500
10	46,0517	52,7537	59,6378	66,6887	73,8936	81,2415	88,7228	96,3293	104,0534	111,8887
20	119,8293	127,8699	136,0059	144,2327	152,5466	160,9438	169,4210	177,9752	186,6035	195,3032
30	204,0718	212,9072	221,8071	230,7695	239,7925	248,8744	258,0134	267,2079	276,4565	285,7578
40	295,1104	304,5129	313,9642	323,4632	333,0087	342,5996	352,2350	361,9139	371,6353	381,3984
50	391,2023	401,0462	410,9293	420,8509	430,8103	440,8067	450,8394	460,9078	471,0114	481,1494
60	491,3213	501,5266	511,7647	522,0350	532,3370	542,6703	553,0344	563,4288	573,8530	584,3067
70	594,7893	605,3005	615,8399	626,4071	637,0016	647,6232	658,2715	668,9460	679,6466	690,3728
80	701,1243	711,9008	722,7020	733,5275	744,3772	755,2507	766,1477	777,0680	788,0113	798,9773
90	809,9657	820,9764	832,0091	843,0635	854,1394	865,2366	876,3549	887,4939	898;6536	909,8337
100	921,0340	932,2543	943,4945	954,7542	966,0333	977,3317	988,6491	999,9854	1011,3403	1022,7138
110	1034,1057	1045,5157	1056,9437	1068,3896	1079,8532	1091,3344	1102,8329	1114,3487	1125,8816	1137,4314
120	1148,9980	1160,5813	1172,1811	1183,7974	1195,4298	1207,0784	1218,7430	1230,4235	1242,1197	1253,8316
130	1265,5590	1277,3017	1289,0597	1300,8329	1312,6211	1324,4242	1336,2421	1348,0748	1359,9220	1371,7838
140	1383,6599	1395,5503	1407,4549	1419,3736	1431,3062	1443,2528	1455,2131	1467,1872	1479,1748	1491,1760
150	1503,1906	1515,2185	1527,2597	1539,3140	1551,3814	1563,4618	1575,5551	1587,6612	1599,7800	1611,9115
160	1624,0556	1636,2122	1648,3812	1660,5626	1672,7562	1684,9620	1697,1799	1709,4099	1721,6519	1733,9058
170	1746,1715	1758,4489	1770,7381	1783,0389	1795,3512	1807,6751	1820,0104	1832,3570	1844,7149	1857,0841
180	1869,4645	1881,8559	1894,2584	1906,6719	1919,0964	1931,5317	1943,9778	1956,4346	1968,9022	1981,3804
190	1993,8691	2006,3684	2018,8782	2031,3984	2043,9290	2056,4698	2069,0209	2081,5823	2094,1537	2106,7353
200	2119,3269	2131,9286	2144,5402	2157,1616	2169,7930	2182,4341	2195,0850	2207,7456	2220,4158	2233,0957
210	2245,7852	2258,4841	2271,1926	2283,9105	2296,6377	2309,3744	2322,1203	2334,8755	2347?6398	2360,4134
220	2373,1861	2385,9879	2398,7888	2411,5986	2424,4174	2437,2452	2450,0818	2462,9273	2475,7816	2488,6447
230	2501,5165	2514,3970	2527,2861	2540,1839	2553,0903	2566,0052	2578,9286	2591,8605	2604,8008	2617,7496
240	2630,7067	2643,6721	2656,6458	2669,6279	2682,6181	2695,6165	2708,6231	2721,6378	2734,6607	2747,6915
250	2760,7305	2773,7774	2786,8323	2799,8951	2812,9658	2826,0444	2839,1308	2852,2251	2865,3271	2878,4369
260	2891,5544	2904,6797	2917,8125	2930,9530	2944,1011	2957,2568	2970,4200	2983,5908	2996,7690	3009,9547
270	3023,1479	3036,3484	3049,5563	3062,7716	3075,9942	3089,2241	3102,4613	3115.7057	3128,9573	3142,2162
280	3155,4822	3168,7553	3182,0356	3195,3229	3208,6174	3221,9188	3235,2273	3248,5428	3261,8652	3275,1946
290	3288,5309	3301,8741	3315,2242	3328,5811	3341,9449	3355,3155	3368,6928	3382,0769	3395,4677	3408,8653

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	3422,2695	3435,6804	3449,0979	3462,5221	3475,9528	3489,3902	3502,8341	3516,2845	3529,7415	3543,2049
310	3556,6748	3570,1512	3583,6340	3597,1232	3610,6188	3624,1208	3637,6291	3651,1437	3664,6647	3678,1919
320	3691,7254	3705,2652	3718,8112	3732,3634	3745,9218	3759,4864	3773,0571	3786,6340	3800,2169	3813,8060
330	3827,4012	3841,0024	3854,6096	3868,2229	3881,8422	3895,4675	3909,0987	3922,7359	3936,3790	3950,0281
340	3963,6830	3977,3438	3991,0105	4004,6831	4018,3615	4032,0456	4045,7356	4059,4314	4073,1329	4086,8402
350	4100,5532	4114,2719	4127,9963	4141,7264	4155,4622	4169,2036	4182,9507	4196,7033	4210,4616	4224,2255
360	4237,9949	4251,7699	4265,5504	4279,3365	4293,1280	4306,9251	4320,7276	4334,5356	4348,3490	4362,1679
370	4375,9922	4389,8219	4403,6570	4417,4975	4431,3433	4445,1945	4459,0510	4472,9129	4486,7800	4500,6524
380	4514,5302	4528,4131	4542,3013	4556,1948	4570,0935	4583,9974	4597,9064	4611,8207	4625,7401	4639,6647
390	4653,5945	4667,5293	4681,4693	4695,4144	4709,3645	4723,3198	4737,2801	4751,2454	4765,2158	4779,1912
400	4793,1716	4807,1570	4821,1475	4835,1431	4849,1432	4863,1478	4877,1568	4891,1709	4905,1900	4919,2190
410	4933,2489	4947,2836	4961,3232	4975,3677	4989,4170	5003,4712	5017,5301	5031,5939	5045,6625	5059,7358
420	5073,8140	5087,8968	5101,9845	5116,0769	5130,1740	5144,2758	5158,3823	5172,4935	5186,6095	5200,7300
430	5214,8553	5228,9852	5243,1197	5257,2589	5271,4027	5285,5510	5299,7040	5313,8616	5328,0238	5342,1905
440	5356,3618	5370,5376	5384,7179	5398,9028	5413,0923	5427,2861	5441,4845	5455,6874	5469,8947	5484,1066
450	5498,3229	5512,5435	5526,7687	5540,9983	5555,2325	5569,4707	5583,7134	5597,9606	5612,2122	5626,4681
460	5640,7284	5654,9930	5669,2620	5683,5355	5697,8129	5712,0948	5726,3810	5740,6715	5754,9663	5769,2654
470	5783,5687	5797,8763	5812,1882	5826,5042	5840,8245	5855,1491	5869,4780	5883,8107	5898,1479	5912,4893
480	5926,8349	5941,1848	5955,5391	5969,8961	5984,2582	5998,6244	6012,9948	6027,3693	6041,7481	6056,1305
490	6070,5173	6084,9081	6099,3031	6113,7020	6128,1051	6142,5122	6156,9236	6171,3389	6185,7585	6200,1809
500	6214,6081	6229,0393	6243,4746	6257,9139	6272,3569	6286,8040	6301,2551	6315,7103	6330,1692	6344,6321
510	6359,0989	6373,5697	6388,0444	6402,5230	6417,0055	6431,4918	6445,9821	6460,4763	6474,9744	6489,4763
520	6503,9820	6518,4915	6533,0050	6547,5222	6562,0433	6576,5682	6591,0969	6605,6294	6620,1657	6634,7058
530	6649,2496	6663,7973	6678,3487	6692,9038	6707,4628	6722,0254	6736,5918	6751,1620	6765,7358	6780,3134
540	6794,8947	6809,4797	6824,0685	6838,6607	6853,2568	6867,8565	6882,4599	6897,0669	6911,6777	6926,2921
550	6940,9101	6955,5318	6970,1570	6984,7860	6999,4185	7014,0546	7028,6943	7043,3377	7057,9846	7072,6351
560	7087,2892	7101,9469	7116,6081	7131,2729	7145,9412	7160,6131	7175,2885	7189,9675	7204,6499	7219,3359
570	7234,0255	7248,7185	7263,4150	7278,1150	7292,8185	7307,5255	7322,2360	7336,9500	7351,6674	7366,3883
580	7381,1126	7395,8404	7410,5716	7425,3063	7440,0443	7454,7859	7469,5308	7484,2791	7499,0309	7513,7860
590	7528,5446	7543,3065	7558,0719	7572,8406	7587,6126	7602,3881	7617,1669	7631,9490	7646,7345	7661,5234

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	7676,3156	7691,1111	7705,9100	7720,7121	7735,5176	7750,3264	7765,1385	7779,9540	7794,7727	7809,5947
610	7824,4199	7839,2485	7854,0803	7868,9154	7883,7538	7898,5954	7913,4403	7928,2884	7943,1397	7957,9943
620	7972,8522	7987,7132	8002,5775	8017,4450	8032,3157	8047,1896	8062,0667	8076,9470	8091,8304	8106,7171
630	8121,6070	8136,5000	8151,3962	8166,2956	8181,1981	8196,1037	8211,0126	8225,9245	8240,8396	8255,7579
640	8270,6793	8285,6038	8300,5314	8315,4621	8330,3960	8345,3329	8360,2730	8375,2161	8390,1623	8405,111?
650	8420,0641	8435,0196	8499,9781	8464,9397	8479,9044	8494,8722	8509,8430	8524,8168	8539,7937	8554,7736
660	8569,7566	8584,7426	8599,7316	8614,7236	8629,7187	8644,7168	8659,7178	8674,7219	8689,7290	8704,7391
670	8719,7521	8734?7682	8749,7872	8764,8092	8779,8342	8794,8621	8809,8930	8824,9269	8839,9637	8855,0035
680	8870,0462	8885,0919	8900,1405	8915,1920	8930,2464	8945,3038	8960,3641	8975,4273	8990,4934	9005,5625
690	9020,6344	9035,7092	9050,7870	9065,8676	9080,9511	9096,0375	9111,1267	9126,2188	9141,3139	9156,4117
700	9171,5125	9186,6161	9201,7225	9216,8318	9231,9439	9247,0589	9262,1767	9277,2974	9292,4208	9307,5471
710	9322,6763	9337,8082	9352,9429	9368,0805	9383,2209	9398,3640	9413,5100	9428,6588	9443,8103	9458,9646
720	9474,1217	9489,2816	9504,4443	9519,6097	9534,7779	9549,9489	9565,1226	9580,2991	9595,4783	9610,6603
730	9625,8450	9641,0325	9656,2227	9671,4156	9686,6113	9701,8096	9717,0107	9732,2146	9747,4211	9762,6303
740	9777,8423	9793,0569	9808;2743	9823,4943	9838,7171	9853,9425	9869,1706	9884,4014	9899,6348	9914,8710
750	9930,1098	9945,3513	9960,5954	9975,8422	9991,0917	10006,3438	10021,5986	10036,8560	10052,1160	10067,3787
760	10082,6440	10097,9120	10113,1826	10128,4558	10143,7316	10159,0100	10174,2911	10189,5748	10204,8610	10220,1499
770	10235,4414	10250,7355	10266,0321	10281,3314	10296,6333	10311,9377	10327,2447	10342,5543	10357,8665	10373,1812
780	10388,4985	10403,8184	10419,1408	10434,4658	10449,7933	10465,1234	10480,4561	10495,7913	10511,1290	10526,4693
790	10541,8121	10557,1574	10572,5052	10587,8556	10603,2085	10618,5640	10633,9219	10649,2824	10664,6453	10680,0108
800	10695,3788	10710,7492	10726,1222	10741,4977	10756,8756	10772,2561	10787,6390	10803,0244	10818,4123	10833,8026
810	10849,1955	10864,5908	10879,9886	10895,3888	10910,7915	10926,1966	10941,6042	10957,0143	10972,4268	10987,8417
820	11003,2591	11018,6789	11034,1012	11049,5259	11064,9530	11080,3826	11095,8146	11111,2490	11126,6858	11142,1250
830	11157,5667	11173,0107	11188,4572	11203,9060	11219,3573	11234,8110	11250,2670	11265,7255	11281,1863	11296,6496
840	11312,1152	11327,5832	11343,0535	11358,5263	11374,0014	11389,4789	11404,9588	11420,4410	11435,9256	11451,4125
850	11466,9018	11482,3934	11497,8874	11513,3838	11528,8825	11544,3835	11559,8869	11575,3926	11590,9006	11606,4110
860	11621,9237	11637,4387	11652,9561	11668,4758	11683,9977	11699,5220	11715,0487	11730,5776	11746,1088	11761,6424
870	11777,1782	11792,7163	11808,2568	11823,7995	11839,3445	11854,8918	11870,4414	11885,9933	11901,5474	11917,1039
880	11932,6626	11948,2235	11963,7868	11979,3523	11994,9201	12010,4901	12026,0624	12041,6370	12057,2138	12072,7929
890	12088,3742	12103,9578	12119,5436	12135,1316	12150,7219	12166,3145	12181,9092	12197,5062	12213,1054	12228,7069

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	12244,3106	12259,9165	12275,5246	12291,1349	12306,7475	12322,3622	12337,9792	12353,5984	12369,2198	12384,8434
910	12400,4692	12416,0972	12431,7273	12447,3597	12462,9943	12478,6310	12494,2700	12509,9111	12525,5544	12541,1999
920	12556,8476	12572,4974	12588,1494	12603,8036	12619,4599	12635,1184	12650,7791	12666,4419	12682,1069	12697,7740
930	12713,4433	12729,1148	12744,7884	12760,4641	12776,1420	12791,8220	12807,5042	12823,1885	12838,8749	12854,5635
940	12870,2542	12885,9470	12901,6419	12917,3390	12933,0382	12948,7395	12964,4429	12980,1485	12995,8561	13011,5659
950	13027,2778	13042,9917	13058,7078	13074,4260	13090,1463	13105,8687	13121,5931	13137,3197	13153,0483	13168,7791
960	13184,5119	13200,2468	13215,9838	13231,7229	13247,4640	13263,2072	13278,9525	13294,6999	13310,4493	13326,2008
970	13341,9544	13357,7100	13373,4677	13389,2274	13404,9892	13420,7531	13436,5190	13452,2869	13468,0569	13483,8290
980	13499,6030	13515,3792	13531,1573	13546,9375	13562,7198	13578,5040	13594,2903	13610,0787	13625,8690	13641,6614
990	13657,4558	13673,2522	13689,0506	13704,8511	13720,6536	13736,4580	13752,2645	13768,0730	13783,8835	13799,6960
1000	13815,5106	13831,3271	13847,1456	13862,9661	13878,7886	13894,6131	13910,4396	13926,2680	13942,0985	13957,9309
1010	13973,7653	13989,6017	14005,4401	14021,2805	14037,1228	14052,9671	14068,8134	14084,6616	14100,5118	14116,3640
1020	14132,2181	14148,0742	14163,9322	14179,7923	14195,6543	14211,5182	14227,3840	14243,2519	14259,1216	14274,9934
1030	14290,8670	14306,7426	14322,6201	14338,4996	14354,3810	14370,2644	14386,1497	14402,0369	14417,9260	14433,8171
1040	14449,7101	14465,6050	14481,5018	14497,4006	14513,3012	14529,2038	14545,1083	14561,0147	14576,9231	14592,8333
1050	14608,7454	14624,6595	14640,5754	14656,4933	14672,4130	14688,3347	14704,2582	14720,1836	14736,1110	14752,0402
1060	14767,9713	14783,9043	14799,8391	14815,7759	14831,7145	14847,6551	14863,5975	14879,5417	14895,4879	14911,4359
1070	14927,3858	14943,3376	14959,2912	14975,2467	14991,2040	15007,1633	15023,1244	15039,0873	15055,0521	15071,0187
1080	15086,9873	15102,9576	15118,9298	15134,9039	15150,8798	15166,8575	15182,8371	15198,8186	15214,8018	15230,7869
1090	15246,7739	15262,7626	15278,7533	15294,7457	15310,7400	15326,7361	15342,7340	15358,7338	15374,7354	15390,7388
1100	15406,7440	15422,7510	15438,7599	15454,7706	15470,7831	15486,7974	15502,8135	15518,8314	15534,8511	15550,8726
1110	15566,8960	15582,9211	15598,9480	15614,9767	15631,0073	15647,0396	15663,0737	15679,1096	15695,1473	15711,1868
1120	15727,2281	15743,2711	15759,3160	15775,3626	15791,4110	15807,4612	15823,5132	15839,5669	15855,6224	15871,6797
1130	15887,7388	15903,7996	15919,8622	15935,9266	15951,9927	15968,0606	15984,1303	16000,2017	16016,2749	16032,3498
1140	16048,4265	16064,5049	16080,5851	16096,6671	16112,7508	16128,8362	16144,9234	16161,0123	16177,1030	16193,1954
1150	16209,2896	16225,3855	16241,4832	16257,5825	16273,6836	16289,7865	16305,8911	16321,9974	16338,1054	16354,2152
1160	16370,3267	16386,4399	16402,5548	16418,6715	16434,7898	16450,9099	16467,0317	16483,1553	16499,2805	16515,4075
1170	16531,5361	16547,6665	16563,7986	16579,9324	16596,0679	16612,2051	16628,3439	16644,4845	16660,6268	16676,7708
1180	16692,9165	16709,0639	16725,2130	16741,3638	16757,5162	16773,6704	16789,8262	16805,9838	16822,1430	16838,3039
1190	16854,4664	16870,6307	16886,7966	16902,9642	16919,1335	16935,3045	16951,4771	16967,6515	16983,8274	17000,0051

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1200	17016,1844	17032,3654	17048,5480	17064,7324	17080,9183	17097,1060	17113,2953	17129,4862	17145,6788	17161,8731
1210	17178,0690	17194,2666	17210,4659	17226,6667	17242,8693	17259,0734	17275,2793	17291,4867	17307,6958	17323,9066
1220	17340,1190	17356,3330	17372,5487	17388,7660	17404,9849	17421,2055	17437,4277	17453,6516	17469,8770	17486,1041
1230	17502,3328	17518,5632	17534,7952	17551,0288	17567,2640	17583,5008	17599,7393	17615,9794	17632,2211	17648,4644
1240	17664,7093	17680,9559	17697?2040	17713,4538	17729,7051	17745,9581	17762,2127	17778,4689	17794,7267	17810,9861
1250	17827,2471	17843,5097	17859,7739	17876,0397	17892,3071	17908,5760	17924,8466	17941,1188	17957,3925	17973,6679
1260	17989,9448	18006,2234	18022,5035	18038,7852	18055,0685	18071,3533	18087,6398	18103,9278	18120,2174	18136,5086
1270	18152,8013	18169,0957	18185,3916	18201,6890	18217,9881	18234,2887	18250,5909	18266,8947	18283,2000	18299,5069
1280	18315,8153	18332,1253	18348,4369	18364,7500	18381,0647	18397,3810	18413,6988	18430,0181	18446,3391	18462,6615
1290	18478,9855	18495,3111	18511,6382	18527,9669	18544,2971	18560,6289	18576,9622	18593,2970	18609,6334	18625,9713
1300	18642,3108	18658,6518	18674,9944	18691,3384	18707,6841	18724,0312	18740,3799	18756,7301	18773,0819	18789,4351
1310	18805,7899	18822,1463	18838,5041	18854,8635	18871,2244	18887,5868	18903,9508	18920,3162	18936,6832	18953,0517
1320	18969,4217	18985,7933	19002,1663	19018,5409	19034,9169	19051,2945	19067,6736	19084,0542	19100,4363	19116,8199
1330	19133,2050	19149,5916	19165,9798	19182,3694	19198,7605	19215,1531	19231,5473	19247,9429	19264,3400	19280,7386
1340	19297,1387	19313,5403	19329,9434	19346,3480	19362,7540	19379,1616	19395,5706	19411,9812	19428,3932	19444,8067
1350	19461,2217	19477,6381	19494,0561	19510,4755	19526,8964	19543,3187	19559,7426	19576,1679	19592,5947	19609,0230
1360	19625,4527	19641,8840	19658,3166	19674,7508	19691,1864	19707,6235	19724,0621	19740,5021	19756,9435	19773,3865
1370	19789,8309	19806,2768	19822,7241	19839,1729	19855,6231	19872,0748	19888,5279	19904,9825	19921,4386	19937,8961
1380	19954,3550	19970,8154	19987,2773	20003,7406	20020,2053	20036,6715	20053,1391	20069,6082	20086,0787	20102,5507
1390	20119,0241	20135,4989	20151,9752	20168,4529	20184,9321	20201,4126	20217,8947	20234,3781	20250,8630	20267,3493
1400	20283,8370	20300,3262	20316,8168	20333,3088	20349,8023	20366,2972	20382,7935	20399,2912	20415,7903	20432,2909
1410	20448,7928	20465,2963	20481,8011	20498,3073	20514,8149	20531,3240	20547,8345	20564,3464	20580,8598	20597,3744
1420	20613,8905	20630,4080	20646,9270	20663,4473	20679,9691	20696,4922	20713,0168	20729,5427	20746,0700	20762,5988
1430	20779,1290	20795,6606	20812,1935	20828,7279	20845,2636	20861,8008	20878,3393	20894,8792	20911,4206	20927,9633
1440	20944,5074	20961,0529	20977,5997	20994,1480	21010,6977	21027,2487	21043,8011	21060,3549	21076,9101	21093,4667
1450	21110,0246	21126,5840	21143,1447	21159,7067	21176,2702	21192,8350	21209,4012	21225,9688	21242,5378	21259,1081
1460	21275,6798	21292,2529	21308,8373	21325,4231	21341,9803	21358,5588	21375,1387	21391,7200	21408,3026	21424,8866
1470	21441,4721	21458,0589	21474,6468	21491,2362	21507,8269	21524,4191	21541,0126	21557,6075	21574,2037	21590,8013
1480	21607,4002	21624,0005	21640,6021	21657,2051	21673,8094	21690,4151	21707,0221	21723,6304	21740,2401	21756,8512
1490	21773,4636	21790,0773	21806,6924	21823,3088	21839,9265	21856,5456	21873,1661	21889,7878	21906,4109	21923,0353

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1500	21939,6612	21956,2883	21972,9167	21989,5465	22006,1776	22022,8100	22039,4438	22056,0789	22072,7153	22089,3530
1510	22105,9921	22122,6325	22139,2742	22155,9172	22172,5616	22189,2073	22205,8543	22222,5026	22239,1522	22255,8032
1520	22272,4555	22289,1091	22305,7640	22322,4202	22339,0777	22355,7366	22372,3967	22389,0582	22405,7209	22422,3850
1530	22439,0504	22455,7171	22472,3851	22489,0544	22505,7251	22522,3970	22539,0702	22555,7447	22572,4205	22589,0977
1540	22605,7761	22622,4558	22639,1368	22655,8192	22672,5028	22689,1877	22705,8739	22722,5614	22739,2502	22755,9403
1550	22772,6317	22789,3243	22806,0183	22822,7135	22839,4100	22856,1079	22872,8070	22889,5074	22906,2090	22922,9120
1560	22939,6162	22956,3218	22973,0286	22989,7366	23006,4460	23023,1567	23039,8686	23056,5818	23073,2962	23090,0120
1570	23106,7290	23123,4473	23140,1669	23156,8877	23173,6099	23190,3332	23207,0579	23223,7838	23240,5110	23257,2395
1580	23273,9692	23290,7002	23307,4324	23324,1660	23340,9008	23357,6368	23374,3741	23391,1127	23407,8525	23424,5936
1590	23441,3360	23458,0796	23474,8244	23491,5706	23508,3179	23525,0666	23541,8164	23558,5676	23575,3200	23592,0736
1600	23608,8285	23625,5846	23642,3420	23659,1007	23675,8606	23692,6217	23709,3841	23726,1477	23742,9126	23759,6787
1610	23776,4461	23793,2147	23809,9845	23826,7556	23843,5279	23860,3015	23877,0763	23893,8523	23910,6296	23927,4081
1620	23944,1878	23960,9688	23977,7510	23994,5345	24011,3191	24028,1051	24044,8922	24061,6806	24078,4702	24095,2610
1630	24112,0531	24128,8463	24145,6409	24162,4366	24179,2335	24196,0317	24212,8311	24229,6318	24246,4336	24263,2367
1640	24280,0410	24296,8465	24313,6532	24330,4612	24347,2703	24364,0807	24380,8923	24397,7051	24414,5192	24431,3344
1650	24448,1509	24464,9685	24481,7874	24498,6075	24515,4288	24532,2513	24549,0750	24565,9000	24582,7261	24599,5534
1660	24616,3820	24633,2117	24650,0427	24666,8748	24683,7082	24700,5427	24717,3785	24734,2155	24751,0536	24767,8930
1670	24784,7335	24801,5753	24818,4183	24835,2624	24852,1077	24868,9543	24885,8020	24902,6509	24919,5011	24936,3524
1680	24953,2049	24970,0586	24986,9135	25003,7695	25020,6268	25037,4852	25054,3449	25071,2057	25088,0677	25104,9309
1690	25121,7953	25138,6608	25155,5276	25172,3955	25189,2646	25206,1349	25223,0064	25239,8790	25256,7528	25273,6278
1700	25290,5040	25307,3814	25324,2599	25341,1396	25358,0205	25374,9025	25391,7858	25408,6702	25425,5558	25442,4425
1710	25459,3304	25476,2195	25493,1097	25510,0011	25526,8937	25543,7875	25560,6824	25577,5785	25594,4757	25611,3741
1720	25628,2737	25645,1745	25662,0764	25678,9794	25695,8837	25712,7890	25729,6956	25746,6033	25763,5121	25780,4222
1730	25797,3335	25814,2457	25831,1592	25848,0738	25864,9896	25881,9065	25898,8246	25915,7438	25932,6643	25949,5859
1740	25966,5086	25983,4324	26000,3574	26017,2836	26034,2109	26051,1393	26068,0689	26084,9997	26101,9318	26118,8646
1750	26135,7987	26152,7340	26169,6705	26186,6081	26203,5468	26220,4867	26237,4277	26254,3699	26271,3132	26288,2576
1760	26305,2032	26322,1499	26339,0977	26356,0467	26372,9968	26389,9481	26406,9004	26423,8538	26440,8086	26457,7644
1770	26474,7213	26491,6795	26508,6385	26525,5988	26542,5602	26559,5227	26576,4864	26593,4512	26610,4171	26627,3842
1780	26644,3524	26661,3217	26678,2921	26695,2636	26712,2363	26729,2101	26746,1850	26763,1610	26780,1382	26797,1164
1790	26814,0958	26831,0763	26848,0579	26865,0407	26882,0245	26899,0095	26915,9954	26932,9827	26949,9711	26966,9605

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1800	26983,9510	27000,9426	27017,9354	27034,9292	27051,9242	27068,9203	27085,9175	27102,9158	27119,9152	27136,9157
1810	27153,9173	27170,9200	27187,9238	27204,9288	27221,9348	27238,9419	27255,9501	27272,9595	27289,9699	27306,9814
1820	27323,9941	27341,0078	27358,0226	27375,0386	27392,0556	27409,0737	27426,0929	27443,1133	27460,1347	27477,1572
1830	27494,1808	27511,2054	27528,2312	27545,2581	27562,2861	27579,3151	27596,3453	27613,3765	27630,4088	27647,4422
1840	27664,4767	27681,5123	27698,5490	27715,5867	27732,6256	27749,6655	27766,7065	27783,7486	27800,7918	27817,8361
1850	27834,8814	27851,9278	27868,9753	27886,0239	27903,0736	27920,1243	27937,1761	27954,2290	27971,2830	27988,3380
1860	28005,3942	28022,4514	28039,5096	28056,5690	28073,6294	28090,6909	28107,7535	28124,8171	28141,8818	28158,9476
1870	28176,0145	28193,0824	28210,1514	28227,2214	28244,2926	28261,3648	28278,4380	28295,5124	28312,5878	28329,6642
1880	28346,7417	28363,8203	28380,9000	28397,9807	28415,0625	28432,1453	28449,2292	28466,3141	28483,4002	28500,4872
1890	28517,5754	28534,6646	28551,7548	28568,8461	28585,9385	28603,0319	28620,1264	28637,2219	28654,3185	28671,4161
1900	28688,5148	28705,6146	28722,7154	28739,8172	28756,9201	28774,0241	28791,1291	28808,2351	28825,3422	22842,4504
1910	28859,5596	28876,6698	28893,7811	28910,8934	28928,0068	28945,1212	28962,2367	28979,3532	28996,4707	29013,5893
1920	29030,7090	29047,8297	29064,9514	29082,0742	29099,1980	29116,3228	29133,4487	29150,5756	29167,7036	29184,8326
1930	29201,9626	29219,0936	29236,2258	29253,3589	29270,4931	29287,6283	29304,7645	29321,9018	29339,0401	29356,1794
1940	29373,3198	29390,4612	29407,6037	29424,7471	29441,8916	29459,0371	29476,1837	29493,3312	29510,4799	29527,6295
1950	29544,7801	29561,9318	29579,0845	29596,2383	29613,3930	29630,5488	29647,7056	29664,8634	29682,0223	29699,1821
1960	29716,3430	29733,5049	29750,6679	29767,8318	29784,9968	29802,1628	29819,3298	29836,4978	29853,6668	29870,8369
1970	29888,0080	29905,1800	29922,3531	29939,5373	29956,7024	29973,8785	29991,0557	30008,2338	30025,4130	30042,5932
1980	30059,7744	30076,9566	30094,1398	30111,3241	30128,5093	30145,6955	30162,8828	30180,0711	30197,2603	30214,4506
1990	30231,6419	30248,8342	30266,0274	30283,2217	30300,4170	30317,6133	30334,8106	30352,0089	30369,2082	30386,4085
2000	30403,6098	30420,8121	30438,0154	30455,2197	30472,4251	30489,6314	30506,8386	30524,0469	30541,2562	30558,4665

2/ *TABLES DE WOOLF, POUR LE CALCUL DE G AVEC CORRECTION DE CONTINUITE DE YATES.*

	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$
0	0,6931	1,2164	4,5815	8,7693	13,5367	18,7522	24,3334	30,2235	36,3811	42,7745
10	49,3789	56,1740	63,1432	70,2726	77,5503	84,9660	92,5109	100,1770	107,9575	115,8462
20	123,8374	131,9263	140,082	148,3790	156,7350	165,1726	173,6887	182,2802	190,9445	199,6790
30	208,4813	217,3492	226,2806	235,2735	244,3262	253,4368	262,6038	271,8256	281,1007	290,4278
40	299,8055	309,2326	318,7078	328,2302	337,7985	347,4118	357,0690	366,7693	376,5117	386,2953
50	396,1193	405,9829	415,8854	425,8259	435,8039	445,8185	455,8692	465,9553	476,0761	486,2312
60	496,4198	506,6416	516,8958	527,1821	537,4998	547,8486	558,2279	568,6372	579,0762	589,5444
70	600,0414	610,5667	621,1201	631,7010	642,3091	652,9441	663,6055	674,2931	685,0065	695,7454
80	706,5094	717,2983	728,1117	738,9494	749,8110	760,6963	771,6050	782,5368	793,4915	804,4687
90	815,4683	826,4900	837,5336	848,5988	859,6854	870,7931	881,9218	893,0712	904,2411	915,4314
100	926,6417	937,8719	949,1219	960,3913	971,6801	982,9880	994,3149	1005,6605	1017,0248	1028,4075
110	1039,8084	1051,2275	1062,6645	1074,1193	1085,5916	1097,0815	1108,5887	1120,1130	1131,6544	1143,2126
120	1154,7876	1166,3792	1177,9872	1189,6116	1201,2521	1212,9087	1224,5813	1236,2697	1247,9737	1259,6933
130	1271,4284	1283,1788	1294,9444	1306,7251	1318,5208	1330,3313	1342,1566	1353,9966	1365,8511	1377,7200
140	1389,6033	1401,5008	1413,4125	1425,3382	1437,2778	1449,2312	1461,1985	1473,1793	1485,1737	1497,1816
150	1509,2029	1521,2374	1533,2852	1545,3461	1557,4200	1569,5068	1581,6065	1593,7190	1605,8442	1617,9820
160	1630,1324	1642,2952	1654,4704	1666,6578	1678,8576	1691,0695	1703,2934	1715,5294	1727,7773	1740,0371
170	1752,3087	1764,5921	1776,8870	1789,1936	1801,5117	1813,8413	1826,1823	1838,5346	1850,8981	1863,2729
180	1875,6588	1888,0558	1900,4638	1912,8828	1925,3127	1937,7534	1950,2048	1962,6671	1975,1399	1987,6234
190	2000,1175	2012,6220	2025,1370	2037,6624	2050,1981	2062,7441	2075,3003	2087,8667	2100,4433	2113,0299
200	2125,6265	2138,2331	2150,8497	2163,4761	2176,1123	2188,7583	2201,4141	2214,0795	2226,7546	2239,4392
210	2252,1335	2264,8372	2277,5503	2290,2729	2303,0049	2315,7462	2328,4967	2341,2565	2354,0255	2366,8036
220	2379,5909	2392,3872	2405,1926	2418,0069	2430,8302	2443,6624	2456,5035	2469,3534	2482,2120	2495,0795
230	2507,9556	2520,8405	2533,7340	2546,6360	2559,5467	2572,4658	2585,3935	2598,3296	2611,2742	2624,2271
240	2637,1884	2650,1580	2663,1358	2676,1220	2689,1163	2702,1188	2715,1295	2728,1482	2741,1751	2754,2100
250	2767,2529	2780,3038	2793,3627	2806,4295	2819,5041	2832,5867	2845,6770	2858,7752	2871,8811	2884,9947
260	2898,1161	2911,2451	2924,3818	2937,5261	2950,6780	2963,8375	2977,0045	2990,1790	3003,3609	3016,5504
270	3029,7472	3042,9514	3056,1630	3069,3820	3082,6082	3095,8418	3109,0826	3122,3306	3135,5859	3148,8483
280	3162,1179	3175,3946	3188,6784	3201,9693	3215,2672	3228,5722	3241,8842	3255,2031	3268,5291	3281,8619
290	3295,2017	3308,5483	3321,9018	3335,2622	3348,6293	3362,0033	3375,3840	3388,7715	3402,1657	3415,5665

SERMENT

En présence des Maîtres de cette Ecole, de mes condisciples, je promets et je jure d'être fidèle aux lois de l'honneur et de la probité dans l'exercice de la médecine.

Je donnerai mes soins à l'indigent et n'exigerai jamais un salaire au-dessus de mon travail. Admis dans l'intérieur des maisons, mes yeux ne verront pas ce qui s'y passe,ma langue taira les secrets qui me seront confiés, et mon état ne servira pas à corrompre les moeurs ni à favoriser le crime.

Reconnaissant envers mes Maîtres, je tiendrai leurs enfants et ceux de mes confrères pour des frères, et s'ils devaient apprendre la médecine ou recourir à mes soins, je les instruirais et les soignerais sans salaire ni engagement.

Si je remplis ce serment sans l'enfreindre, qu'il me soit donné de jouir heureusement de la vie et de ma profession, honoré à jamais parmi les hommes. Si je le viole et que je me parjure, puissé-je avoir un sort contraire.

Vu,
Le Président de l'Université de Bordeaux II :

H. BRICAUD.

Bon à imprimer,
Le Président de Thèse :

J. DUHAMEL.

Vu et permis d'imprimer,
Le Chancelier des Universités :

R. PAULIAN.

Editions A.C.E.M.B. 75 cours de la Somme -33000 BORDEAUX -